

**О.А. ХАНДЖЯН**

**НАЧАЛА И ОСНОВЫ ТЕОРИИ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ**

(третье издание исправленное)

Москва 2000 (2-е издание), 2009 (исправления)

## Исправления 2009 года:

1. Слово «гексограмма» заменено на «гексаграмма».
2. Стр. 92 и 93 в табл. 4.1 слова «классы» заменено на слово «множества».
3. Заменены два последних предложения в последнем абзаце п. 2.3.
4. Исправлено на рис. 37 изображение фа 4\3.
5. Исправлена формула 3.8.
6. Исправлен рис. 4.
7. В п. 2.2 слово «амплитудно-частотная» заменена на «передаточная».
8. Исправлен рис. 29 (вместо  $\frac{3}{4}$  написано  $\frac{4}{3}$ )

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1. ПРОСТЕЙШИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АБСТРАКЦИИ.....</b>	<b>8</b>
<b>ГЛАВА 2. ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНАЯ (КЛАССИЧЕСКАЯ) ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.....</b>	<b>11</b>
2.1. Представление сигналов и преобразований.....	11
2.2. Свойства моделей классического представления.....	18
2.3. Пространственно-временной феномен как всеобщая форма координации физических явлений.....	21
2.4. Принципы пространственноподобного способа представления.....	23
2.5. Принципы времениподобного способа представления.....	28
2.6. Алгебра множеств и живопись.....	35
<b>ГЛАВА 3. ВРЕМЕНИПОДОБНЫЙ (ИНТЕРВАЛЬНЫЙ) СПОСОБ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.....</b>	<b>39</b>
3.1. Основные начала и понятия в асимметрии.....	39
3.2. Линейные интервальные преобразования и их модели.....	50
3.3. Сравнение двух способов выполнения операции сложения.....	63
3.4. Представление периодических сигналов с помощью последовательности признаков.....	68
<b>ГЛАВА 4. ВРЕМЕНИПОДОБНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ.....</b>	<b>80</b>
4.1. Задача времениподобного представления последовательностей импульсов.....	80
4.2. Линейное пространство последовательностей импульсов и его модели.....	82
4.3. Свойства асимметричного линейного пространства последовательностей импульсов.....	85
4.4. Частный случай асимметричного линейного пространства последовательностей импульсов.....	89
4.5. Преобразования и их свойства.....	94
<b>ГЛАВА 5. ВРЕМЕНИПОДОБНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВАКУУМА.....</b>	<b>103</b>
5.1. Модели базовых устройств в двух системах представления.....	103
5.2. Живопись как единство двух систем представления.....	105
5.3. Вакуум, изображение, движение.....	116
5.4. Музыкальная гамма.....	125
5.5. «Книга Перемен».....	130
<b>ГЛАВА 6. ПРИМЕРЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ.....</b>	<b>145</b>
6.1. Линейные интервальные фильтры.....	145
6.2. Электронная линза.....	149

---

6.3. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ИМПУЛЬСОВ .....	156
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>170</b>
<b>СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ.....</b>	<b>172</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>174</b>

*«Вся наука в целом – это космология, и все известные нам цивилизации старались понять мир, в котором мы живем, нас самих, а также наше знание как часть этого мира» К. Поппер*

## **ВВЕДЕНИЕ**

Если говорить о задаче науки в самом общем виде, то это - научное представление или просто представление физического мира, объективной реальности. Данная книга посвящена исследованию этой задачи.

Представление как таковое развивается в науке по отношению только к такому реальному объекту, который воспринимается нами как нечто определенное, ограниченное какими-то рамками существования и какой-то совокупностью свойств. Представление в науке формируется путем построения адекватной модели явления. Коль скоро модель построена, она образует знание, которое и обеспечивает связь между физическим миром и результатами опыта.

Основной вопрос представления, - вопрос об элементарной структуре явления и его элементарных свойствах, - уходит своими корнями в античную эпоху. На протяжении развития мышления человечества многократно было показано, что его можно считать в целом либо дискретным, либо непрерывным, либо количественным, либо качественным, либо симметричным, либо асимметричным.

Все перечисленные выше характеристики в определенной комбинации являются на самом деле синонимами и одна из частных задач книги это наведение порядка и выявление связи между этими характеристиками.

Выработанный в книге подход можно рассматривать, как утверждающий существование двух образцов, двух способов представления. Тем самым он совпадает с подходом И. Канта, полученного им

---

при исследовании возможностей познания. Именно ему принадлежит доказательство ограниченности познания. В тоже время каждый из двух способов представления это те "узкие ворота", через которые открыт доступ к освоению действительного мира.

В связи с этим, и в рамках основной задачи книги, в ней рассмотрены три области деятельности человека: техника, физика и живопись. Все они в течение последнего столетия претерпели значительные перемены, обеспечившие их существенное развитие и расширение. Тем не менее, по отношению к поставленной задаче скорее возник узел противоречий, чем понимание. Этот узел противоречий, безусловно, является в настоящее время основным препятствием для дальнейшего продвижения.

Что касается техники, то вся методология технического знания исходит из существования не двух, а только одного образца знания, соответствующего ньютонову обратимому времени. Еще более сложная и противоречивая ситуация возникла в физике. С одной стороны, здесь введен принцип дополнительности, а, с другой стороны, симметрия объявлена более фундаментальным первичным свойством физического мира, чем асимметрия. И тут же, несмотря на последнее утверждение, эйнштейновская физика необратимого времени считается более общей, чем ньютоновская. И только в живописи, правда, без ясного понимания глубинного содержания и глубинных свойств, было выработано два подхода: классический подход, основанный на разделении пространственной и временной компонент, и новый подход, рассматривающий пространство, время и цвет только в их неразрывном единстве. Новый подход вполне соответствует подходу в теории относительности, объединившей пространство и время в четырехмерный континуум.

Основная задача книги решается путем построения основ второго образца знания и распространения его на рассматриваемые области деятельности. Для этого в качестве объекта для анализа выбраны

сигналы, т.е. выбран простейший случай объектов, существующих в рамках одномерной пространственной и временной компонент. Кроме сигналов, в книге частично рассмотрены также двумерные изображения.

Практический опыт деятельности человека показывает, что сигналы, как объекты физического мира, безусловно существуют, причем в разных проявлениях, и существует также явление сложения сигналов, обеспечивающее образование более сложного, чем один сигнал, объекта. Этих двух утверждений оказывается вполне достаточно для проведения всеобъемлющего исследования.

Принятое в книге сужение области физических объектов оправдано также тем, что общий случай многомерных пространственных объектов обеспечивается в математике заменой линейных математических выражений на матрицы. Сигнал же в данном контексте обладает преимуществом, которое обычно обеспечивается, когда выбирается простейший объект. Это же можно сказать и о связанной с ним теории.

В книге много внимания уделяется сопоставлению двух подходов, что лучше обеспечивает выявление их свойств и особенностей. С этой же целью для второго образца знания приведены примеры технической реализации в тех областях использования, где оно имеет заметное преимущество.

Во второе издание включены два новых раздела. Раздел по моделированию новыми средствами музыкальной шкалы и раздел по анализу «Книги Перемен», как оказалось описывающей первый пример системы, построенной по второму образцу знания.

#### *Участие и благодарности*

Раздел 3.4 и частично 5.5 написаны совместно с Ханджяном Аркадием Олеговичем. Автор выражает благодарность д.ф.м.н. Петухову Сергею Валентиновичу, сделавшему ряд ценных замечаний и обратившему мое внимание на связь новых понятий с биосистемами и музыкой.

## Глава 1. ПРОСТЕЙШИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АБСТРАКЦИИ

Простейшая физическая абстракция это многообразие. Из общих соображений вытекает, что многообразие может быть либо прерывным, либо непрерывным. "В зависимости от того, существует ли или не существует непрерывный переход от одного состояния к другому, мы имеем дело с непрерывным или прерывным многообразием" [1]. Вслед за этим в математике введена абстракция в виде понятия множества или совокупности, являющегося также простейшим и представляющего собой объединение в одном общем или в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью.

Будем рассматривать дискретные множества **M** и непрерывные множества **W**. В дискретных множествах **M** первичными являются объекты, которые образуют это множество. Эти объекты называют элементами множества. Будем обозначать их малыми начальными буквами латинского алфавита. Если элемент  $a$  участвует в образовании множества **M**, то будем использовать запись  $a \in \mathbf{M}$ . Множество на основе элемента  $a$  будем также обозначать как  $\{a\}$ . Дискретное множество может быть образовано конечным, счетным или в пределе более чем счетным числом элементов. В непрерывных множествах **W** первичным является само множество. Непрерывное множество это континуум. Однако оно может разбиваться на объекты, которые будем называть частями. (По Аристотелю (т. 3 стр. 27): «все непрерывное ... безгранично делимо») Части, в отличие от элементов, могут быть не только автономными друг от друга, но и перекрываться и за счет этого частично или полностью включать одна другую. Будем обозначать части малыми последними буквами латинского алфавита. Если часть  $x$  принадлежит множеству **W**, то будем аналогично записывать  $x \in \mathbf{W}$ . Мощность множества это число его элементов или частей.

При таком подходе к заданию множеств в первом случае сперва



определены наименьшие объекты, ими являются элементы, в том числе и нулевой элемент  $0$  и, следовательно, пустое множество, обозначаемое  $\{0\}$ . Во втором случае сперва определен собственно объект, им является заранее обозначенная часть  $I$  множества  $\mathbf{W}$ . Объект может быть задан в позитивном виде, как множество  $I$ , либо в негативном виде, как дополнительное множество  $\bar{I}$  до всего множества  $\mathbf{W}$ .

Части непрерывного множества сами являются множествами, любая совокупность элементов или частей также образует множество. В связи с этим в математике установлена общая аксиома, утверждающая, что для каждого множества существует множество, составленное из подмножеств данного множества. Такое множество называют булеаном  $V(\mathbf{M})$  или  $V(I)$ . Например, булеан  $V(\mathbf{M})$ , образованный на основе трех элементов  $a, b, c$  будет таким

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{M}) = ( \{0\}; & & & \text{(класс 0)} \\
 \{a\}; \{b\}; \{c\}; & & & \text{(класс 1)} \\
 \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; & & & \text{(класс 2)} \\
 \{a, b, c\} ) & & & \text{(класс 3)}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Подмножества, образованные одинаковым количеством элементов, образуют класс равномоощных подмножеств, который удобно обозначать элементами числового ряда. Очевидно, что число подмножеств одного класса равно числу сочетаний  $C_n^i$  из  $n$  числа элементов по  $i$ . Точно также булеан  $V(I)$  множества  $I = \{x, y, z\}$  будет таким

$$\begin{aligned}
 V(I) = ( \{0\}; & & & \text{(класс 4)} \\
 \{x\}; \{y\}; \{z\}; & & & \text{(класс 3)} \\
 \{x, y\}; \{x, z\}; \{y, z\}; & & & \text{(класс 2)} \\
 \{x, y, z\}; & & & \text{(класс 1)} \\
 \{1\} ) , & & & \text{(класс 0)}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

здесь  $\{1\}=I$  универсальное (единичное) множество,  $\{0\}$ - множество  $\bar{I}$ . Нумерация классов в данном случае выполнена в обратном порядке.

Упомянутая выше аксиома в абстрактной математической форме описывает присущую природе способность к развитию: доказано, что множество всех подмножеств данного множества имеет мощность большую, чем исходное множество. В случае дискретного множества развитие- это процесс образования новых множеств путем увеличения размеров исходного множества. В случае непрерывного множества новые множества возникают путем дальнейшего дробления исходного множества.

Изучение абстракции дискретного множества приводит также к одной специальной конструкции множеств, связанной с изменением размерности, называемой прямым (декартовым) произведением множеств. Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться в основном двумерные множества, то показано, что дискретное множество **M** выступает как декартово произведение двух одномерных дискретных множеств. Двумерный континуум **I** будем называть также бинарной поверхностью. Аналогичным образом бинарная поверхность разделяется на две унарные поверхности.

Особое место в математических конструкциях занимает числовой ряд действительных чисел. Проще всего его роль можно объяснить, если взять для примера натуральные числа. С одной стороны натуральные числа можно рассматривать как цифры (ноль, один, ...), когда они используются для обозначения количества элементов, и тогда числовой ряд это дискретное множество **R** всех своих значений с более чем счетным числом элементов. В этом случае числа связываются между собой с помощью арифметических операций. Но, с другой стороны, можно считать, что числа обеспечивают нумерацию частей (первая, вторая, ...), упорядоченных по своему размещению. Тогда числовой ряд не что иное, как последовательность номеров из непрерывного множества действительных чисел  $\mathfrak{R}$ . Во втором случае на первый план выходят отношения порядка и эквивалентности, а также всякие другие сравнения действительных чисел между собой [2].

## Глава 2. ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНАЯ (КЛАССИЧЕСКАЯ) ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

### 2.1. Представление сигналов и преобразований

Под сигналом, вообще говоря, понимают любой наблюдаемый процесс изменения во времени какой-либо физической величины. В классической теории представления сигналы рассматриваются в координатах пространства и времени. Считается, что физическая величина измерима, определяется положением в пространстве  $\mathbf{A}$  и, в этом смысле, может быть охарактеризована числом  $\alpha$  из числового ряда цифр  $\mathbf{R}$ . В связи с этим будем называть классическую теорию представления пространственноподобной.

Математической моделью сигнала в классическом его представлении является некоторая ассоциированная с ним функция времени. Специально подчеркнем, что время здесь используется как независимая переменная. Моменты времени  $\mathbf{T}$  также являются цифрами. Таким образом, сигнал переводится в рамки отображения  $f: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$ , обеспечивающего, в конечном счете, представление сигнала с помощью формулы, т.е. с помощью аналитического выражения, допускающего разложение в ряд.

Следующим важным шагом при построении теории является предположение, что физически сложение сигналов осуществляется путем их арифметического суммирования, что существует нулевой сигнал и для каждого сигнала существует противоположный ему сигнал, и что сумма двух любых сигналов из рассматриваемого множества также есть сигнал этого множества. При этом допускаются произвольные всевозможные растяжения или сжатия сигнала по амплитуде, что аналитически описывается как умножение любого из сигналов на число. Такое множество сигналов вместе с операцией арифметического сложения называют линейным пространством сигналов, являюще-

гося частью более общей алгебраической структуры  $\langle \mathbf{M}, + \rangle$ .

Окончательно это выглядит так: множество сигналов  $\mathbf{M}$  в классической теории сведено к бесконечномерному пространству непрерывных функций, заданных на некотором интервале, образующих в совокупности аддитивную абелеву группу над полем  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

Дальнейшее исследование сигналов как бесконечномерного пространства непрерывных функций производится средствами математики, которая, прежде всего, приводит к понятию о базисных функциях. На их основе, как известно, обеспечивается разложение сигнала  $f(t)$  в ряд по тригонометрическим функциям (преобразование Фурье)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\omega t - b_n \sin n\omega t), \text{ где}$$

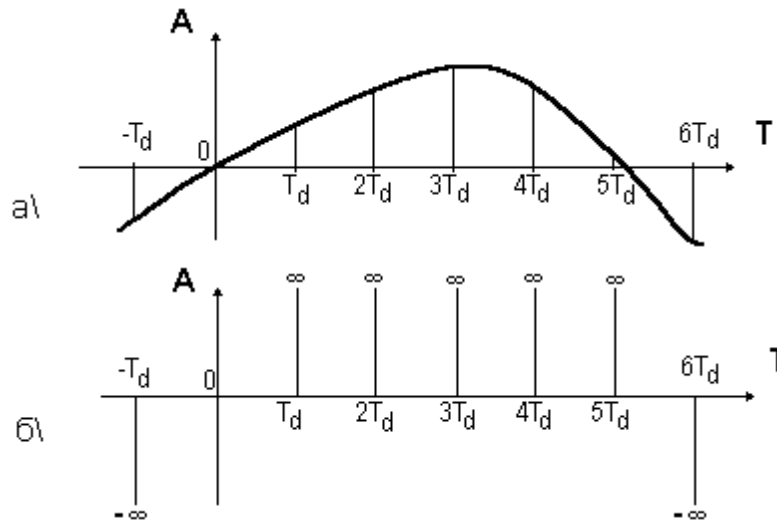
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad (2.1)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt,$$

и где функция  $f(t)$  задана на интервале  $[-T/2, T/2]$  и является периодической с периодом  $T = 2\pi/\omega$ . В целом гармонический анализ периодических колебаний приводит к представлению с помощью спектра, являющегося в классической теории основным инструментом анализа.

Этот процесс может быть естественным образом продолжен на случай, когда рассматриваются не все моменты времени, а только следующие друг за другом через определенный интервал. Не совсем точно этот случай называют случаем дискретного изменения времени. Более правильно его называть случаем выборочных значений. Имея это в виду, тем не менее, будем пользоваться и общепринятым термином. Вместо  $f(t)$  здесь рассматриваются ее значения в точках  $nT_d$ , где  $T_d$  период дискретизации и  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Функция  $f(t)$  в этом слу-

чае заменяется на функцию  $f(nT_d) = f(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$ , рис. 1.



**рис. 1** Переход к выборочным значениям: а) исходный сигнал  
б) выборочные отсчеты сигнала

Спектральная плотность  $S_T(\omega)$  такого сигнала определяется следующим выражением

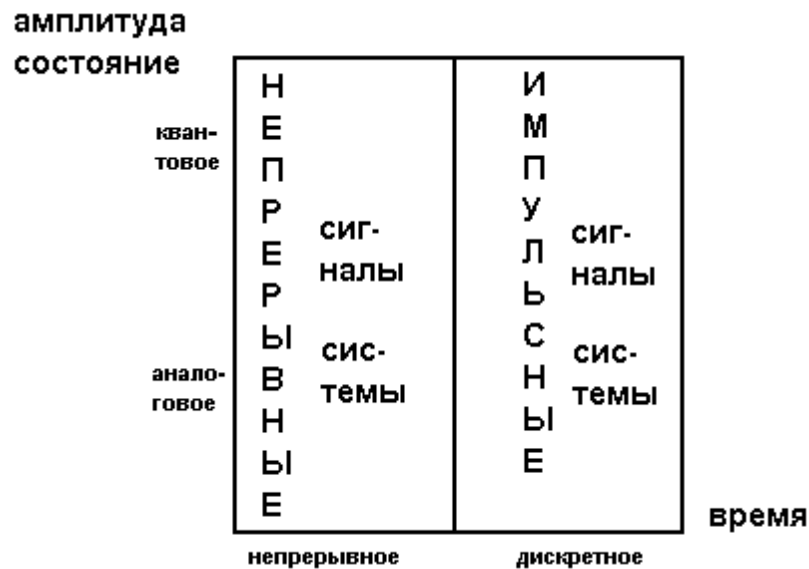
$$S_T(\omega) = \sum_0^{\infty} f(nT_d) \exp(-j\omega nT_d). \quad (2.2)$$

Спектр  $S_T(\omega)$  дискретизованного сигнала представляет собой последовательность спектров  $S(\omega)$  исходного сигнала  $f(t)$ , сдвинутых один относительно другого на величину  $2\pi/T_d$ . Выбор величины  $T_d$  производится по теореме отсчетов и обычно зависит только от спектра входного сигнала.

Все возникающие здесь математические трудности преодолеваются с помощью дельта - функции  $\delta(t)$ , растягивающей преобразуемую функцию  $f(t)$  определенным образом в точках дискретизации до бесконечности и сжимающей до нуля в остальных точках.

Как известно выборочные значения могут использоваться не только для времени, но и для амплитуды. Изобразим возможное разнообра-

разие сигналов условно в виде квадрата, построенного на двух взаимно перпендикулярных отрезках, исходящих из одной точки. Один из отрезков соответствует времени (горизонтальный), а другой - амплитуде (вертикальный), рис. 2.



**рис. 2. Классификация сигналов и систем при пространственноподобном представлении**

Пусть половина каждого отрезка соответствует случаю использования всех значений времени и амплитуды (его называют случаем непрерывного изменения), а вторая половина, случаю использования выборочных значений, т.е., соответственно, дискретного и квантованного изменения времени и амплитуды. Тогда теоретически можно говорить о разбиении множества сигналов на четыре класса.

Однако классическая теория представления допускает существование только двух классов: класса непрерывных и класса импульсных сигналов. Объясняется это тем, что ее аналитические средства в принципе не приспособлены для отображения эффекта квантования.

Все основные модели в классической теории были получены с помощью аппарата теории функций и анализа бесконечно малых величин, но особенно существенна роль анализа бесконечно малых в случае моделирования процессов преобразования. Векторно-

дифференциальный анализ и здесь является основным инструментом, обеспечивая описание систем преобразования сигналов в классической теории.

В принципе задача линейного отображения (линейной фильтрации) формулируется безотносительно к способу представления сигналов, как практически самая важная задача отображения, обеспечивающая независимое и пропорциональное действие преобразования по отношению к каждому из входных сигналов, поступающих в виде сложеного сигнала. Математически линейное отображение записывается в алгебраической форме как отображение  $\Lambda$ , реализующее для сигналов  $f$  и  $g$  следующее

$$\begin{aligned}\Lambda(f + g) &= \Lambda(f) + \Lambda(g) \\ \Lambda(\alpha f) &= \alpha\Lambda(f),\end{aligned}\tag{2.3}$$

где  $\alpha$  - действительное число.

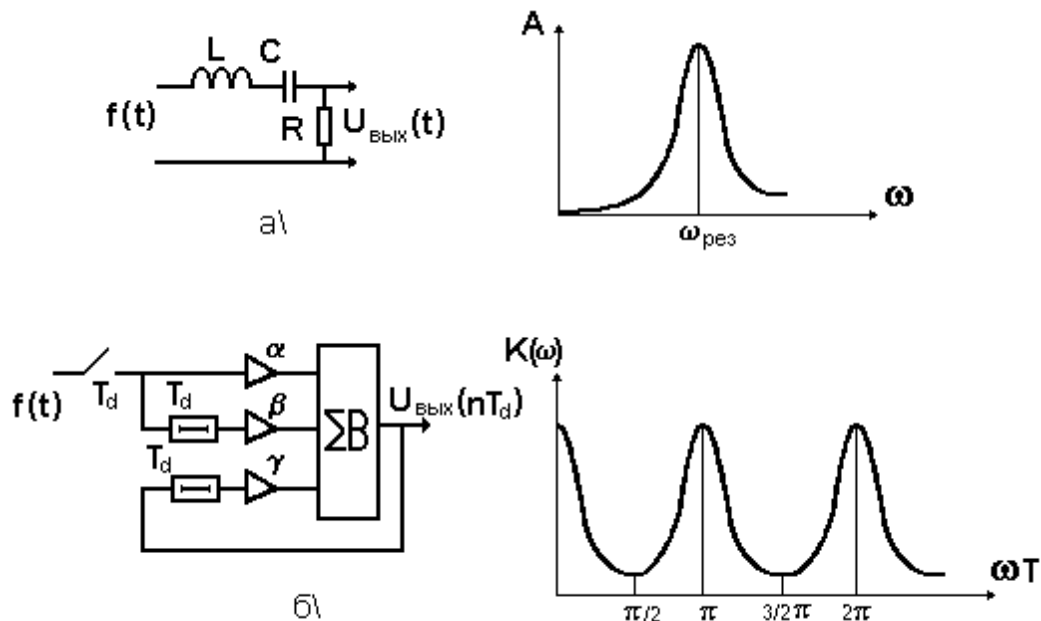
Системы, с помощью которых выполняются отображения данного вида, называются в классической теории линейными стационарными системами. Их функционирование, как известно, описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Относительно линейной системы говорят, что в ней соблюдается принцип суперпозиции.

Среди множества линейных систем две системы занимают ключевое положение в классической теории и называются базовыми системами. Это резонансная система, использующая линейные преобразования дифференцирования и интегрирования первого порядка. Ее работа описывается уравнениями

$$\begin{aligned}L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = f(t) \\ U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_R(t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где  $i(t)$  - функция, описывающая изменение тока,  $L, R, C$ - величины индуктивности, сопротивления резистора и емкости конденсатора,  $U_{\text{ВЫХ}}(t)$  - функция, описывающая выходной сигнал,  $U_R(t)$ - функция,

описывающая изменение напряжения на сопротивлении.



**рис. 3. Базовые системы пространственноподобного способа представления: а) колебательный контур и его резонансная кривая б) рекурсивный фильтр и его амплитудно-частотная характеристика**

И это рекурсивный фильтр первого порядка, в который преобразуется резонансная система при переходе к выборочным значениям. Его называют также импульсной системой или системой с выборочными данными.

Переход к дискретной шкале времени сопровождается преобразованием непрерывных функций в решетчатые и линейных дифференциальных уравнений в разностные. Для резонансной системы при введении шага дискретизации  $T_d$  имеем

$$U_{\text{ВЫХ}}(nT_d) = \{\alpha f(nT_d) + \beta f[(n-1)T_d]\} + \gamma U_{\text{ВЫХ}}[(n-1)T_d]. \quad (2.5)$$

Полученное линейное разностное уравнение реализуется в устройстве рекурсивного линейного цифрового фильтра, содержащего прямую запаздывающую связь и обратную запаздывающую связь, рис. 3 [3].

По своему физическому смыслу прямая запаздывающая связь со-



ответствует действию конденсатора, а обратная запаздывающая связь - действию индуктивности. Обозначение устройства сумматора как  $\Sigma B$  на схеме введено для того, чтобы подчеркнуть, что при разных знаках слагаемых на входе сумматора действие суммирования заменяется на действие вычитания.

Таким образом, при пространственноподобном способе представления множество систем также делится на два класса: на класс непрерывных систем и класс импульсных систем.

Мы будем рассматривать только абстрактный случай устройств систем, построенных из идеальных компонент, и не всяких систем, а только реализуемых систем, которыми являются системы с конечным числом компонент. При классическом способе представления базовые системы являются реализуемыми системами.

Базовые линейные системы относятся к системам с невырожденными преобразованиями. Для таких систем можно построить систему, осуществляющую обратное преобразование. На языке алгебры это означает, что такие преобразования образуют группу относительно умножения преобразований [4].

Пространство непрерывных функций вместе с операцией суммирования в общем виде можно определить как структуру  $\langle B(\mathbf{M}), + \rangle$ . Неделимыми элементами здесь являются гармонические функции с несовпадающими частотами  $a = \alpha \sin \omega_1 t$ ,  $b = \beta \sin \omega_2 t$ ,  $c = \gamma \sin \omega_3 t, \dots$  где  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  - произвольные вещественные числа. Это позволяет в пространстве непрерывных функций определить все возможные в нем сигналы с разбиением их на характеристические классы

$$\begin{aligned}
 \langle B(\mathbf{M}), + \rangle = & 0 + && \text{(класс 0)} \\
 & + a + b + c + \dots && \text{(класс 1)} \\
 & + a b + a c + \dots + b c \dots && \text{(класс 2)} \\
 & \dots && \\
 & + abcdef \dots, && \text{(класс n)}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

объединяющие однотипные сигналы. Сигналы класса 1 по отдельности обычно называют просто сигналами. Сигналы класса 2 называют модулированными сигналами.

## 2.2. Свойства моделей классического представления

Считается, что процессы преобразования в системах классического типа осуществляются путем воздействия на мгновенное значение амплитуды сигнала, т.е. действуют в вертикальном направлении пространственной компоненты.

Физически фильтрация в линейной системе происходит за счет ослабления боковых частот без изменения их числа. Теоретически при включении и выключении входного сигнала переходные процессы здесь продолжаются бесконечно долго по времени.

Аналитические средства классического представления при применении к сигналам с амплитудной модуляцией, оказываются безусловно эффективными, поскольку позволяют точно и просто описать этот физический объект. Уравнение для сигнала с амплитудной модуляцией имеет вид

$$f(t) = [ 1 + g(t) ] \cos \omega t, \quad (2.7)$$

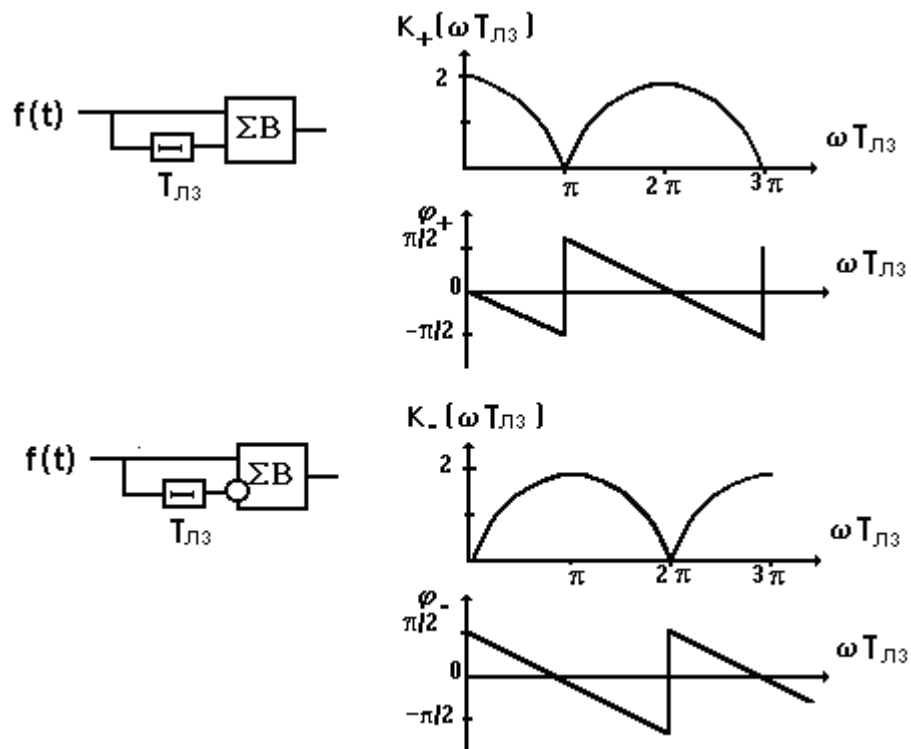
где  $g(t)$  -модулирующая функция, а  $\omega$  - частота несущей.

Напротив, в случае сигнала с частотной модуляцией (ЧМ) эффективность метода невысока. Теория представляет такой сигнал, как содержащий бесконечное число составляющих в спектре. Аналитическое выражение для записи рассматриваемого процесса определить не удастся. Даже в случае синусоидальной несущей и синусоидальной модулирующей сигнала с частотной модуляцией, теория предлагает только приближенное выражение для его описания. Приближение обеспечивается путем использования бесконечного числа членов в аналитической записи

$$f(t) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi) \sin ( \omega + n \Omega ) t , \quad (2.8)$$

где  $J_n(\xi)$  - функция Бесселя,  $\omega$  - частота несущей,  $\Omega$  - частота модуляции,  $\alpha$  - амплитуда.

Известно, что линейное отображение, как преобразование с соблюдением принципа суперпозиции, может осуществляться не только в системах, обеспечивающих невырожденные преобразования, но и в некоторых системах с вырожденными преобразованиями. Однако эффективность методов классического представления при применении их к таким системам также заметно снижается. Выражается это в том, что вместо конечных выражений возникают математические аналитические выражения с бесконечным числом членов, следовательно, о точном моделировании если и можно говорить, то теперь уже только в предельном смысле.



**рис. 4. Устройства с запаздывающей положительной и отрицательной прямой связью**

Рассмотрим для примера одну из систем, в которой используется накопление, например, систему, содержащую устройство суммирования (или вычитания) с запаздывающей прямой связью для входного

сигнала. Такая система применяется в оптимальном фильтре для прямоугольных импульсов, являясь его выходной частью, рис. 4.

Передаточная функция такой системы, работающей в условиях непрерывного изменения времени и состояния, записывается как

$$K(j\omega) = 1 \pm \exp(-j\omega T_{\text{ЛЗ}}),$$

а ее передаточная (или частотная) характеристика имеет следующий вид

для суммирующей схемы накопителя

$$K_+(\omega T_{\text{ЛЗ}}) = 2 \left| \cos \frac{\omega T_{\text{ЛЗ}}}{2} \right| \text{ и } \varphi_+(\omega T_{\text{ЛЗ}}) = -\frac{\omega T_{\text{ЛЗ}}}{2} \text{ - фазовый спектр;}$$

,

$$K_-(\omega T_{\text{ЛЗ}}) = 2 \left| \sin \frac{\omega T_{\text{ЛЗ}}}{2} \right| \text{ и } \varphi_-(\omega T_{\text{ЛЗ}}) = \frac{\pi - \omega T_{\text{ЛЗ}}}{2} \quad (2.9)$$

для вычитающей схемы накопителя,

где  $T_{\text{ЛЗ}}$  - время задержки в линии задержки.

Впадина между "зубцами" на передаточной характеристике здесь достигает нуля [5]. Если рассмотреть теперь обратный переход от математической модели к устройству на основе идеальных компонент, то для этого потребуются бесконечное число резонансных контуров, настроенных на максимумы "зубцов" передаточной характеристики.

Такие системы используются главным образом для работы с входными сигналами в форме импульсов. Импульсы, в отличие от гармонических сигналов, являются односторонними сигналами, элементами полупространства от всего линейного пространства, которое на самом деле не является подпространством. При таком применении сумматор (или вычитатель) могут быть упрощены за счет исключения тех их частей, которые связаны с анализом знака и выполнением обратной операции. Однако это упрощение не сопровождается соответствующим изменением аналитического выражения, теория на него не реагирует. В силу ориентировки теории на симметричные структуры этот случай

упрощения остается вне ее рамок, и, следовательно, моделирование и в этой части становится неточным.

### **2.3. Пространственно-временной феномен как всеобщая форма координации физических явлений**

Физика в процессе своего развития сформировала научное знание о физическом мире и его основах. В частности в ней было развито представление о пространственно-временном феномене (ПВФ) как о всеобщей форме координации физических явлений [6-10].

Как было оговорено ранее, главным образом будет рассмотрена задача представления для простейшего двумерного случая ПВФ, который отвечает физическим явлениям, известным как всевозможные сигналы и одномерные движения на плоскости.

На первоначальном этапе развития в физике утвердился подход, при котором первичными были объявлены компоненты пространства и времени, выступившие в ней как независимые ключевые составляющие, как простейшие физические абстракции. Образование ПВФ обеспечивается путем их взаимодействия. Затем ему на смену пришел другой подход, выработанный в теории относительности. Факт относительности одновременности совершения событий в ПВФ приводит к возможности как замедления времени, так и изменения размеров в направлении движения. "Отныне пространство само по себе и время само по себе уходят в мир теней, и сохраняет реальность лишь их своеобразный союз", так обобщил возникшее в физике новое представление Г. Минковский. Тем самым теория относительности привела к образованию второго подхода, при котором пространственная и временная координаты уже не считаются первичными.

Основная трудность здесь образовалась в том, что новый подход в нарушение принципа дополнительности был объявлен более широким, охватывающим старое представление как некоторый частный случай. Однако правильной, на наш взгляд, является другая точка зрения, которая объявляет ПВФ более сложным объектом, чем любое

представление о нем. В этих условиях каждый из двух подходов в физике возможен, независим и по-своему справедлив. Если это же сформулировать более детально, то в ПВФ можно считать первичными компоненты пространства и времени, а можно считать, что они вторичны по отношению к ПВФ. ПВФ можно рассматривать как дискретный феномен и как непрерывный феномен, считая, что на самом деле ПВФ, как объект физического мира, является носителем и того и другого. И, наконец, что особенно важно для данного исследования, ПВФ выступает как носитель двух противоположных фундаментальных свойств: симметрии и асимметрии. Отметим, что свойство симметрии ПВФ проявляется при рассмотрении пространства, для всякого направления, в котором можно мыслить противоположное направление, а свойство асимметрии проявляется через время, в котором существует направленность течения [9].

Несмотря на двойственный характер свойств и сущности ПВФ, в современном представлении ПВФ и физических явлений в ПВФ главным образом находит отображение та часть их содержания, которая обладает симметрией. Все время создается впечатление, что это свойство является доминирующим. Укажем для примера на такие глобальные вещи, как установленную симметрию (инвариантность) всех законов физики относительно пространственно-временных преобразований сдвига и поворота физической системы как целого в пространстве, а также сдвига физической системы во времени.

Установлены также симметрии, отвечающие дискретным преобразованиям: изменению знака времени (обращение времени), пространственной инверсии (так называемая зеркальная симметрия природы), зарядовому сопряжению - операции замены всех частиц, участвующих в каком-либо взаимодействии, на соответствующие им античастицы [6]. И, наконец, в основе специальной теории относительности лежит принцип относительности, согласно которому все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Из этого принципа

вытекает, что четырехмерный интервал  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$  является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность является математическим выражением однородности и изотропности пространства - свойств, непосредственно вытекающих из симметрии ПВФ.

## 2.4. Принципы пространственноподобного способа представления

Сложившееся положение явилось следствием тех особенностей научного представления, основы которого были заложены Галилеем и Ньютоном, а еще ранее Аристотелем, создавшим философское учение, провозгласившее, что пространство и время суть различные компоненты опыта. Это представление мы и называем классическим представлением.

Математика в те времена в основном была развита как геометрия и счет, тесно связанные с формулами и функциями. Анализируя движение тел, Галилей отчетливо осознал, что если отказаться от выяснения причин возникновения и протекания движения, то его моделирование можно осуществить с помощью существующих математических средств. Он получил замечательные результаты в виде первых математических формул, связанных с движением [11].

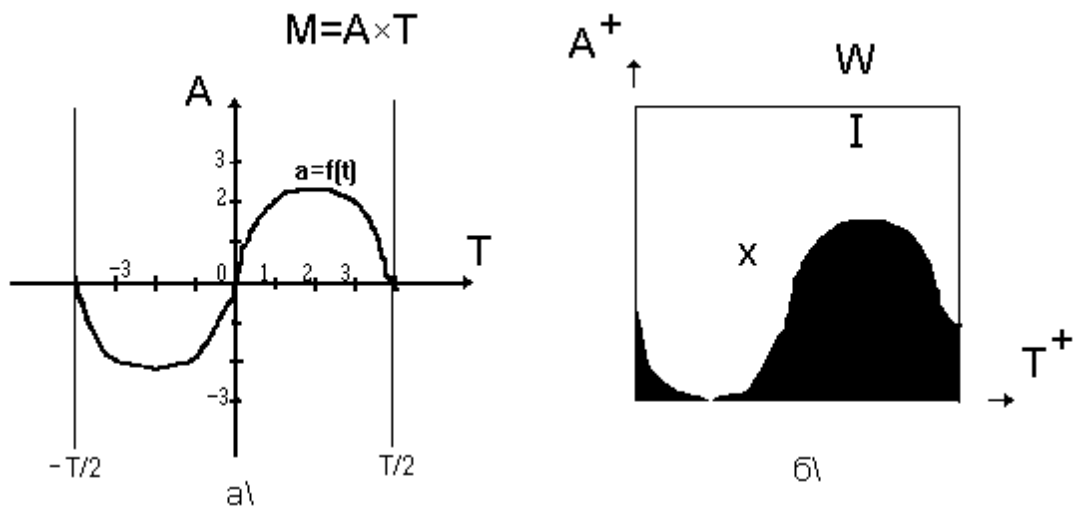
Ньютон развил этот подход, сделав понятия об абсолютном пространстве и абсолютном времени главным в науке, что обеспечило окончательное разделение представления сигналов и движений на две полностью независимые друг от друга составляющие, каждая из которых обладает своей специализацией [9].

Математической моделью ПВФ в этом случае является прямоугольная система координат, образованная перпендикулярными друг к другу и продолженными в обе стороны бесконечно осями координат. Вертикальная ось относится к пространственной переменной, а горизонтальная ось к временной переменной. Движение и сигнал рассмат-

риваются как результат перемещения в пространстве, при этом время при моделировании выступает как независимая переменная. Движение и сигнал отождествляются здесь с их траекторией.

Дальнейшее развитие математики этого направления в части анализа бесконечно малых величин привело к векторно-дифференциальному описанию, завершившему создание математических средств классической системы моделирования Галилея- Ньютона. Эта математическая система в полной мере отвечает способу представления, при котором пространству отводится роль среды для размещения объектов.

Таким образом, особенность математических средств классической системы моделирования состоит в том, что они выбраны исходя из ориентации на пространственную компоненту и ее свойство симметрии. Именно это определяет не только возможности, но и ограничения математических средств направления, а вместе с этим и всего пространственноподобного способа представления.



**рис. 5. Представление ПВФ, движений и сигналов: а) пространственноподобный способ б) времениподобный способ**

Оценка положения объекта в пространстве, сопоставление объектов производится в классической теории путем измерения координаты (амплитуды). Любые реально проводимые измерения, простейшим



примером которых служит поштучный счет, осуществляются дискретно и на основе арифметических операций. В связи с этим математическая абстракция вертикальной пространственной оси координат **A** в классической теории - это множество действительных чисел, примененных как цифры, рис. 5а.

В модели это реализуется следующим образом. Сперва пространственная ось координат должна быть размечена с помощью некоторого масштабного отрезка. Это позволяет обозначить в модели размещение целых положительных и отрицательных чисел. А далее считается, что возможно бесконечное дробление отрезков, что позволяет проводить измерение с любой требуемой точностью. Тем самым для моделирования пространства в классической теории использовано только прерывное многообразие, содержащее в зависимости от задачи конечное, счетное или более чем счетное число элементов. Именно элементы являются первичными при образовании здесь множества, а не наоборот.

Этот же основополагающий подход был использован Ньютоном при рассмотрении любой системы. Им было введено фундаментальное понятие состояния системы, и именно он предложил считать, что поведение системы полностью определяется поведением элементов ее составляющих.

С математической точки зрения классический подход можно рассматривать как моделирование в рамках алгебраической структуры  $\langle \mathbf{M}, \text{Op1}, \text{Op2}, \dots \rangle$ , где  $\mathbf{M}$  - множество элементов,  $\text{Op1}, \text{Op2}, \dots$  - различные арифметические операции, сопутствующие счету.

Взятая за основу ориентация предопределила в классической теории подход в отношении времени. Если специализация пространства определяется тем, что предложено к нему относиться как к среде для размещения объектов, то специализация времени состоит в рассмотрении его как совокупности меток, отделяющих одно положение объекта от другого. Последнее и создает необходимые предпосылки

для использования выбранных математических средств для отображения движений и сигналов. Эта точка зрения предполагает ориентацию при моделировании на свойство времени, которое можно определить, как возможность выражения его через дискретные длины временных интервалов, свойство, реализуемое в рамках счета, также как и для пространственной переменной. В этом случае знак промежутка времени совершенно не играет роли и может быть произвольным. Время тем самым сводится к симметричной категории  $\mathbf{T}$ , имеющей два противоположных бесконечных продолжения, а все пространство - к декартову произведению двух симметричных множеств  $\mathbf{M} = \mathbf{A} \times \mathbf{T}$  [10].

Таким образом, общепринятые в классической теории термины непрерывный и дискретный не точно отражают ситуацию. Было бы более правильно говорить, соответственно, о дискретных и выборочных дискретных значениях при том, что количество дискретных значений может возрасти до более чем счетного числа.

В этих условиях указание положения движущегося объекта или сигнала обеспечивается исключительно с помощью пространственной координаты, которую в технике называют мгновенным значением амплитуды. Это предопределяет представление их с помощью траектории, представляющей собой линию, образованную множеством точек, отвечающих значениям амплитуды в различные моменты времени. Ориентация на траекторию является ключевым моментом в моделировании и приводит далее к использованию функции, описывающей эту траекторию математически.

Значения функции  $f: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$ , как средства связывания двух разных множеств, одного для пространства  $\mathbf{A}$  и другого для времени  $\mathbf{T}$ , могут быть как положительными, так и отрицательными. Это математическое средство идеально отвечает задаче отображения симметричных явлений, поскольку математическое выражение само по себе при изменении знака не меняется.

Исследование рассматриваемой математической структуры, пока-

зало, что ключевое место в ней занимает структура группы  $\langle M, Op \rangle$ . Группа это математическое образование, которое в абстрактной форме определяет симметричное множество из любых произвольных элементов, независимо от связывающей их операции, является математической абстракцией симметрии в ее простейшей форме. Достигается это через симметричную конструкцию для группы, которая содержит всегда элементы трех типов: нейтральный элемент, элементы и противоположные им или обратные элементы. Группа замечательна также тем, что задает всегда определенную систему, поскольку она замкнута относительно групповой операции.

Конструкция группы использована во всех основных понятиях и подходах системы моделирования, отвечающей классическому способу представления. Укажем на определение линейного пространства сигналов, являющегося абелевой группой относительно сложения элементов, на множество линейных обратимых операторов, являющихся группой относительно умножения операторов, на определение линейной системы, в которой пространства входных сигналов, выходных сигналов и состояний являются конечномерными или бесконечномерными абелевыми группами над полем действительных чисел [4].

Использование прерывных многообразий с конечным или бесконечным числом элементов, симметричных структур на базе арифметических операций составляет основу классического метода, как системы понятий и моделей, и, так или иначе, определяет свойства физических и всех других теорий, построенных с помощью этих математических средств, придает им общие черты и создает преемственность.

Не только в классической механике Ньютона, но и во всех последующих физических теориях понятие состояния, как первичного элемента по отношению к системе, остается ключевым. Рассмотрим, например, механику сплошных сред. Их теория также была построена как теория систем, образованных из элементарных масс и объемов, состояние и поведение которых определяло свойства сплошной сре-

ды. Термодинамика и статистическая физика предполагали знание состояния и поведения молекул газа. Электродинамика также была выведена Максвеллом из концепции состояния. Все они обладают преемственностью. Механика сплошных сред имеет в основе классическую механику, термодинамика, статистическая физика и электродинамика имеют в основе механику сплошных сред [6].

Несмотря на очевидные успехи физических теорий со временем также все более стали обращать на себя внимание их объективные ограничения. Например, это имеет место в квантовой теории поля, где требования целостности частицы, релятивистской инвариантности и причинности выступили как противоречивые. Очень часто это выражается в форме появления лишенных физического смысла бесконечно больших значений для некоторых физических величин - так называемых расходимостей. Накопленная неудовлетворенность физиков вылилась в продолжающийся неустанно поиск новых теорий, призванных преодолеть ограничения используемых подходов [33].

В рамках данной работы, рассматривающей главным образом сигналы, показано, что в определенных случаях сигналов и систем средства классической теории также не обеспечивают точные модели. Это вызвано исключительно определенной ориентацией классической теории и проявляется, в частности, при моделировании ЧМ сигналов и систем с вырожденными преобразованиями.

## **2.5. Принципы времениподобного способа представления**

Теория относительности, покончившая с понятием абсолютного времени, показала также, что главная специфика этой физической абстракции совершенно в другом. Она обусловлена изначальным его свойством направленности или хода, устанавливающего отличие причин от следствий. Кроме того, в теории относительности пространство и время стали выступать как равноправные части единого целого. Это предопределяет возможность альтернативного подхода к развитию представления о движениях и сигналах, ориентированного на время и

его свойство асимметрии [10]. Отметим сразу, что в математике теперь уже имеются все необходимые для этого средства моделирования.

Альтернативным образом будем считать, что независимой переменной является пространственная переменная, а сигналы и движения будем рассматривать как результат изменения не амплитудных значений, а временных интервалов. Чтобы замена пространства на время не свелась к замене переменных, в новом подходе должны быть использованы другие средства моделирования, отличающиеся тем, что они должны отвечать свойству асимметрии времени. Для этого необходимо, прежде всего, изменить тип применяемого для моделирования многообразия.

Также как ориентация на симметрию приводит к необходимости использования прерывного многообразия (симметрия является основным свойством этого типа многообразия), точно также свойство асимметрии обеспечивается при использовании непрерывного многообразия.

Непрерывное многообразие является первичным по отношению к своим частям, оно не образовано своими частями, а может делиться на части. Для части, в отличие от элементов, нет представления об обратной или противоположной части, а есть представление о дополняющей ее части до целого многообразия. Сравнение объектов в случае непрерывных многообразий можно осуществить не путем измерения, а с помощью установления различных отношений, т.е. на качественном уровне. Речь может идти о "больше" или "меньше", а не о "сколько" так определил это различие в своей работе Б. Риман [1].

Среди всех отношений наиболее важными являются отношения порядка и эквивалентности. Пусть  $I$  - некоторое непрерывное многообразие из  $W$ , содержащее части  $x, y, z, \dots$ , связанные бинарным отношением  $@$  со свойством рефлексивности ( $x@x$  для всех частей), симметричности (из  $x@y$  следует  $y@x$ ) и транзитивности (из  $x@y$  и  $y@z$  следует  $x@z$ ). Тогда  $I$  разбивается на попарно непересекающиеся

классы  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  такие, что части из одного и того же класса связаны отношением @, а части из различных классов - не связаны.

В этом находит отражение весьма общий принцип, применяемый в математике, который заключается в том, что объекты не измеряются, а сравниваются путем сопоставления свойств. Для них важна не величина, а принадлежность к некоторому классу эквивалентных объектов, обладающих теми же свойствами. Тем самым здесь применяется не вычисление, а происходит распознавание объекта. Этот принцип ориентирован на косвенное задание объектов с помощью их свойств и, тем самым, на задание не одного объекта, а совокупности эквивалентных объектов [2].

В классической теории используемые математические средства базируются на существовании предела отношения  $\frac{\Delta a}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , что обеспечивает возможность выполнения дифференцирования и интегрирования. Здесь же должно быть результативно сравнение величин по критерию больше или меньше, что обеспечивает возможность выполнения логических операций.

Подобные случаи частей  $x, y, z, \dots \in I$  в силу их природы относятся к другому направлению в математике, к направлению решеток, отвечающей структуре  $\langle I, \vee, \& \rangle$ , где  $\vee$  и  $\&$  - знаки логических операций "ИЛИ" и "И".

Несмотря на то, что и функции и логические уравнения изучаются в настоящее время в математике, в дальнейшем будем отдельно говорить о математике и логике, придав им изначально самостоятельный смысл. Это обеспечит более ясное изложение принятой в книге позиции.

Если рассмотреть решетку по каждой из ее двух логических операций, то это будет полугруппа. Полугруппа, с одной стороны, является математической абстракцией более общего вида, чем группа: как известно в полугруппе содержатся элементы только двух типов, это

нейтральный элемент и все остальные элементы, и она также замкнута относительно своей операции, благодаря чему всякая группа является одновременно и полугруппой. Но, с другой стороны, полугруппа, как математическое образование, содержит случаи, которые принципиально нельзя расширить до группы. Эти случаи и обеспечивают возможность математического абстрактного анализа совокупностей с асимметричными свойствами.

Долгое время считалось, что полугруппа не имеет самостоятельного значения. Положение коренным образом изменилось, после того как было доказано, что существуют полугруппы с нейтральным элементом не вложимые в группы, т.е. существуют полугруппы, принципиально независимые от группы. Это, в частности, позволило строго доказать невозможность преобразования друг в друга булевой алгебры и арифметики, т.е. теории решеток и теории линейной алгебры, или, в самом общем виде, логики и математики [12].

Детальный анализ полугрупп решетки показывает, что ее полугруппы не удовлетворяют закону сокращения, т.е. из  $x \& y = x \& z$  или  $x \vee y = x \vee z$  не следует, что  $y = z$ . Такие полугруппы не обладают свойством вложения в группу (расширения до группы) и, следовательно, представляют собой совершенно самостоятельное математическое образование, которое нельзя свести к симметричному случаю. В силу этого решетка в целом является базовой структурой с асимметричной конструкцией.

Приведенные выше соображения относительно выбора математических средств моделирования находят применение при соответствующем задании среды для представления сигналов, адекватной новому подходу. Для этого первоначально вводится в рассмотрение бинарная поверхность  $I$ , например, в виде прямоугольника в размере стандартного листа страницы. Началом поверхности можно считать левый нижний угол. Системы координат в виде прямоугольной пары линий здесь нет, вместо этого рассматривают два унарных направле-

ния с общим началом: горизонтальное  $T^+$  или временное и вертикальное  $A^+$  или пространственное, направленные вправо и вверх, рис. 5б. Направление для времени  $T^+$  и направление для пространства  $A^+$  это части меньшей размерности от целого - непрерывного многообразия в виде поверхности  $I$ . Тем самым между ними нет того принципиального различия, которое придается им в классическом представлении.

При таком подходе, например, направление для времени  $T^+$  это непрерывная совокупность интервалов времени одного знака с общим началом, упорядоченных по длине. Чем дальше от начала, тем больше промежуток времени.

С сигналом или движением в этом случае связывается не функция, а часть поверхности  $I$ , которую в некоторых разделах математики называют областью. Очевидно, что при этом способе отсутствует понятие полярности сигнала, очевидно также, что этот способ применим для любых периодических движений и сигналов.

Если уже на этом первоначальном этапе сравнить этот способ представления с классическим способом, то нельзя сказать, что новый способ лучше или хуже представления с помощью функции. Каждый из них имеет свою область применения. Например, при использовании функции не обеспечивается представление многозначных объектов, а здесь это не вызывает трудностей.

Пусть имеется произвольный периодический сигнал, определяемый областью  $x$  класса  $\omega(x)$ . Значения независимой переменной - это разные по величине уровни электрического напряжения вдоль вертикального направления  $A^+$ . Каждому такому уровню соответствует слой области  $x$ , представляющий собой периодически следующие друг за другом интервалы в горизонтальном направлении одинаковой длины. Все эти интервалы обладают общим свойством - одинаковым периодом и тем самым принадлежат к одному и тому же классу  $\omega(x)$ .



Такие интервалы являются унарными частями, но обычно их называют симплексами, а всю область  $x$  сигнала рассматривают как некоторый симплициальный комплекс.

Будем использовать характеристическую функцию, которая будет равна единице в пределах длины интервала симплекса и нулю в промежутке между интервалами. Очевидно, что симплексы, расположенные ниже направления  $T^+$ , всегда тождественно равны единице, а выше наибольшего отклонения сигнала - тождественно равны нулю. С учетом этого класс сигнала  $x$  запишется как

$$\omega(x) = 1 \# x \# 0, \quad (2.10)$$

где  $\#$  знак совокупности, а  $x$  принимает значения 1 и 0 с определенной периодичностью.

Выражение этого типа может быть использовано в качестве основы для выведения аналитического выражения для описания сигнала. Как было отмечено, оно рассматривает сигналы как однополярные. Для сравнения укажем, что в классической теории однополярный сигнал, как самостоятельный объект представления, вообще отсутствует. Аналитические средства классической теории определяют такой сигнал как сумму двух функции, одна из которых является функцией, задающей смещение уровня, а другая определяет переменную составляющую сигнала. Тем самым при таком представлении для каждой составляющей сохраняется возможность получения противоположного значения.

Теория решеток, как математическое средство само по себе, в настоящее время хорошо разработана, и, в принципе, позволяет ставить задачу сравнения объектов по их свойствам и, в конечном счете, разбивать их на классы определенным образом. При этом преобразование, выполняемые над объектами в этой теории, базируются на логические операции. Они являются интервальными преобразованиями, поскольку, в конечном счете, результатом их действия становится изменение длины симплексов. Отметим, что изменение длины симплек-

сов может, вообще говоря, повлечь за собой изменение их количества, т.е. амплитуды сигнала. Это происходит, например, при преобразовании симплекса в симплекс тождественно равный нулю или единице. Но это здесь вторичное явление, сопровождающее процесс преобразования [9,11].

В отличие от классического случая линейного пространства, непрерывное многообразие  $I$  в каждый данный момент должно иметь определенные размеры. Благодаря этому при представлении движений и сигналов с помощью областей всегда можно образовывать для них области, являющиеся их дополнениями в размере всего непрерывного многообразия. Это обстоятельство позволяет перейти к более узкой разновидности решетки, а именно, к булевой структуре. Последнее позволяет в новой теории ориентироваться на булеву структуру, как на своеобразное асимметричное линейное пространство.

Такое пространство существенно отличается от классического линейного пространства. Прежде всего оно является структурой, содержащей не одну, а две операции, и, кроме этого, в нем используется другой способ линейного изменения объектов. Оно осуществляется не путем их растяжения или сжатия в какое-нибудь число раз, а путем удлинения или укорочения на некоторую величину.

Поскольку булева алгебра содержит два предельных элемента, - ноль и единицу, - то преобразование объектов, вообще говоря, может привести к их потере как в процессе укорочения так и в процессе удлинения их симплексов. Происходит это тогда, когда преобразование приводит к образованию объектов, соответственно, тождественно равных нулю или единице. В классической же теории это допускается только при умножении на ноль.

Что касается собственно процессов преобразования, то времени-подобному способу представления отвечают, вообще говоря, всевозможные процессы накопления. Объясняется это тем, что в них в качестве основного параметра всегда присутствует временной интервал,

задаваемый, как правило, с помощью линии задержки. По существу же этот временной интервал определяет интересующий класс объектов, подлежащих обнаружению. Такое обнаружение можно обеспечить путем сопоставления текущего класса объектов с заданным интересующим классом, что является ни чем иным как сравнением по порядку в направлении времени.

## 2.6. Алгебра множеств и живопись

Если в одномерном пространстве объекты это всевозможные сигналы, то в двумерном пространстве такими объектами становятся изображения, которые, как известно, являются предметом живописного творчества.

Живопись, как основной вид изобразительного искусства, прошла длительный путь развития, сопровождавшийся тщательным анализом ее форм и возможностей. Целому ряду художников принадлежат идеи и примеры, обозначившие ключевые моменты существования живописи, а один из радикальных результатов был сформулирован в этом виде творчества К. Малевичем.

Найденные им художественные средства, еще в начале этого столетия с поразительной точностью подтвердили существование двух форм представления в живописи и в определенной степени предугадали времениподобный подход. Созданное им направление супрематизма и основные живописные полотна, иллюстрирующие это направление, предельно точно на живописном языке раскрывают содержание его концепции, целиком совпадающей с концепцией, принятой в книге. Приводимые ниже выдержки из его статей показывают это.

"вся живопись... закреплена формой натуры";

"Супрематизм: - беспредметное творчество,... в котором энергия цвета доминирует.";

Новое искусство - "борьба за выход из вещи";

"Живопись - краска, цвет..., но краска находилась в угнетении здравого смысла.";

"Я преобразился в нуле форм и вышел за нуль к творчеству";

"Формы говорят, что человек пришел к равновесию из одnorазумного состояния к двуразумному (разум утилитарный и интуитивный);

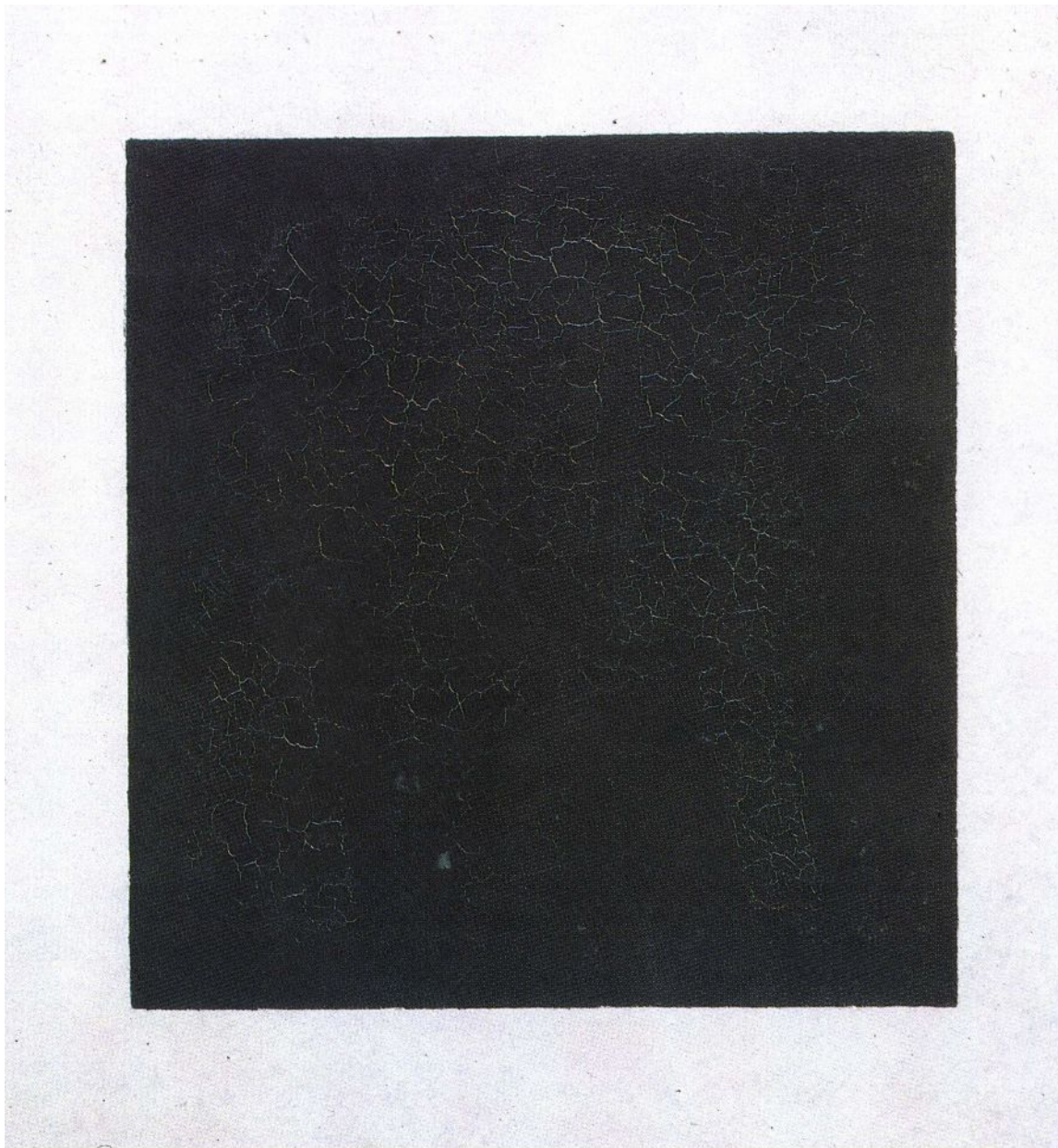
"Для меня стало ясным, что должны быть созданы новые основы чистой цветописы, которые конструировались по требованиям цвета, и второе, что, в свою очередь, цвет должен выйти из живописной смеси в самостоятельную единицу"[21].

Итак, Малевич подтверждает, что в живописи существует две основные формы. Это форма, базирующаяся на возможности рисунка, обеспечивающая возможно точное изображение предметов, и форма, крайний вид которой основывается на использовании цвета. Поиск основ второго направления привел его к знаменитой идее окрашенного в один тон квадрата. "Квадрат не подсознательная форма. Это творчество интуитивного разума. Лицо нового искусства" , - написал он. Черный квадрат по Малевичу является первофигурой, первоначальным элементом этого направления творчества. Из него, словно из ядра, посредством делений и модификаций возникают все дальнейшие композиции, в совокупности своей формирующие супрематический мир.

Как известно тем же способом вводятся объекты в алгебре множеств. Здесь необходимо первоначально четко определить общее множество. Это делается путем задания его в виде квадрата (прямоугольника) от всего множества. Квадрат образует полное (универсальное множество), играющее роль единицы. Нулем здесь обозначается негативное изображение объекта в виде дополнения по отношению ко всему множеству. Очевидно, что таким дополнением для черного квадрата будет белый квадрат.

В супрематических композициях отчетливо прослеживается и намерение отразить порядок задания частей путем тщательно вырисованных наложений, намерение провести их классификацию, что достигается путем окрашивания в одинаковый цвет. Как далее будет пока-

зано, все это свойственно и времениподобному подходу. (К. Малевич, Черный квадрат, Супрематизм)



***К. Малевич Черный квадрат. 1914***



*К. Малевич Супрематизм. 1915*

## Глава 3. ВРЕМЕНИПОДОБНЫЙ (ИНТЕРВАЛЬНЫЙ) СПОСОБ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

### 3.1. Основные начала и понятия в асимметрии

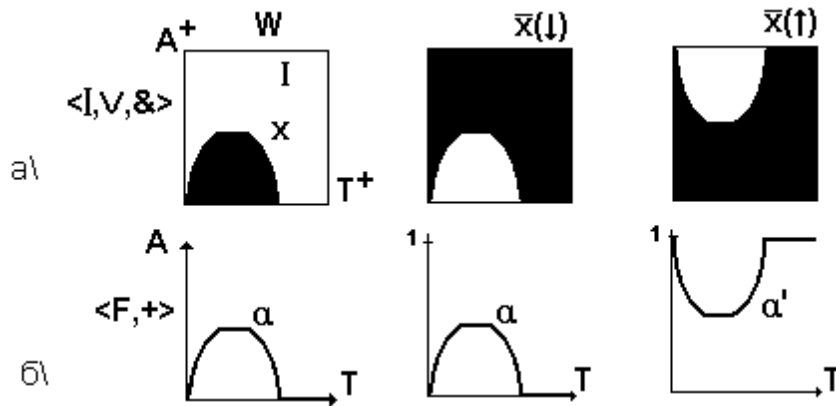
Как уже отмечалось, асимметрия реализуется при использовании непрерывного множества  $\mathbf{W}$ . Определенность возникает тогда, когда рассматривается не все множество  $\mathbf{W}$ , а его часть  $I \subset \mathbf{W}$  - универсальное множество в виде поверхности, ограниченной некоторым максимальным размером. У поверхности  $I$  существует начало и два связанных с ним направления  $A^+$  и  $T^+$ , а сигнал представляется областью или частью поверхности. Предполагается также, что кусок поверхности, отвечающий универсальному множеству  $I$ , может периодически повторяться в горизонтальном направлении, что обеспечивает моделирование любых требуемых временных интервалов при изображении периодических сигналов. Области могут связываться друг с другом с помощью логических операций сложения и умножения. Множество областей  $\langle x, y, z, \dots \rangle \subset I$  вместе с одной из двух логических операций образует полугруппу, а с двумя логическими операциями - булеву структуру  $\langle I, \vee, \& \rangle$ . Очевидно, что для областей справедливы следующие соотношения:  $x \vee 0 = x$ ,  $x \& 1 = x$ ,  $x \& 0 = 0$ ,  $x \vee \bar{x} = 1$ ,  $x \& \bar{x} = 0$ .

Поскольку независимой переменной здесь является пространственная переменная, то область - это бинарная часть, образованная совокупностью горизонтальных линий определенного размера. Следовательно область является симплицимальным комплексом, что особенно наглядным становится при переходе в квантованную область амплитуд.

Физически реальным сигналам соответствуют области, в которых симплексы расположены упорядоченно по длине и так, что чем короче симплекс, тем выше он размещается. Порядок, при котором более ко-

роткие по длине симплексы размещаются выше более длинных симплексов, будем называть упорядочением снизу-вверх и обозначать  $x(\uparrow)$ . Упорядочение в обратном порядке (сверху вниз) будем обозначать  $x(\downarrow)$ .

Дополнение  $\bar{x}$  области  $x$  является областью, симплексы которой упорядочены в обратном порядке, т.е. для  $x(\uparrow)$  имеем  $\bar{x}(\downarrow)$ . Изменим порядок упорядочения симплексов области  $\bar{x}(\downarrow)$  на противоположный, получим область  $\bar{x}(\uparrow)$ , однозначно связанную с областью  $\bar{x}(\downarrow)$ , рис. 6а.



**рис. 6. Представление одиночного сигнала: а) сигнал и его дополнение; б) вспомогательная модель сигнала**

Введем в рассмотрение также вспомогательную модель для сигналов  $\langle F_I, + \rangle$ , представляющую их в виде огибающей или рельефа области, т.е. в виде функциональной кривой. При переходе к вспомогательной модели будем менять обозначения частей  $x, y, z, \dots$  на обозначения элементов  $a, b, c, \dots$ . Ясно, что при этом  $x$  и  $\bar{x}(\downarrow)$  переходят в один и тот же элемент  $a$ , а  $\bar{x}(\uparrow)$  переходит в элемент, который будем обозначать  $a'$ , рис. 6б.

Использование дополнений, упорядоченных одинаковым образом



с исходными частями, позволяет описать более детально, на уровне аналитических выражений, существующую связь между моделью сигнала в классе решеток и вспомогательной моделью в классе линейной алгебры. Как следует из рис. 6, переход к вспомогательной модели сопровождается преобразованием пары логических уравнений

$$\lceil x(\uparrow) \vee \bar{x}(\downarrow) = 1 \rceil$$

$\lfloor x(\uparrow) \& \bar{x}(\downarrow) = 0 \rfloor$  в одно алгебраическое уравнение  $a + a' = 1$ . Очевидно, что буквенный знак  $a$  для рельефа следует считать здесь обозначением для мгновенного значения амплитуды.

Основное допущение, которое используется в данной работе, сводится к предложению рассматривать булеву структуру  $\langle I, \vee, \& \rangle$ , как асимметричное линейное пространство. Во времениподобном подходе булева структура занимает тоже место, что и линейное пространство в классической теории.

Булевой структурой, как это общепринято, называется алгебраическая структура  $\langle I, \vee, \& \rangle$ , в которой:

1. Имеется две операции, посредством которых любым двум частям  $x$  и  $y$  множества  $I$  ставится в соответствие третья часть  $z$  этого множества:  $x \vee y = z$  и  $x \& y = z$ .
2. Операции коммутативны и дистрибутивны, т. е.:
  - 2.1.  $x \vee y = y \vee x$  и  $x \& y = y \& x$ ,
  - 2.2.  $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$  и  $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ .
3. Существуют две части  $0$  и  $1$  множества  $I$  такие, что:  $x \vee 0 = x$  и  $x \& 1 = x$ .
4. Для каждой части  $x$  множества  $I$  существует часть  $\bar{x}$  такая, что:  $x \vee \bar{x} = 1$  и  $x \& \bar{x} = 0$ . [13]

Рассмотрим произвольную область  $x$ , определяющую сигнал с периодом  $T_0$ . Разным значениям для независимой переменной, т.е. разным уровням напряжения, например в вольтах, вдоль направления

$A^+$ , соответствуют горизонтальные линии симплексов определенной длины. Несмотря на возможную разницу по длине и фазе, все они эквивалентны в том смысле, что относятся к одному классу, объединяющему симплексы со свойством "быть симплексом с периодом  $T_0$ ".

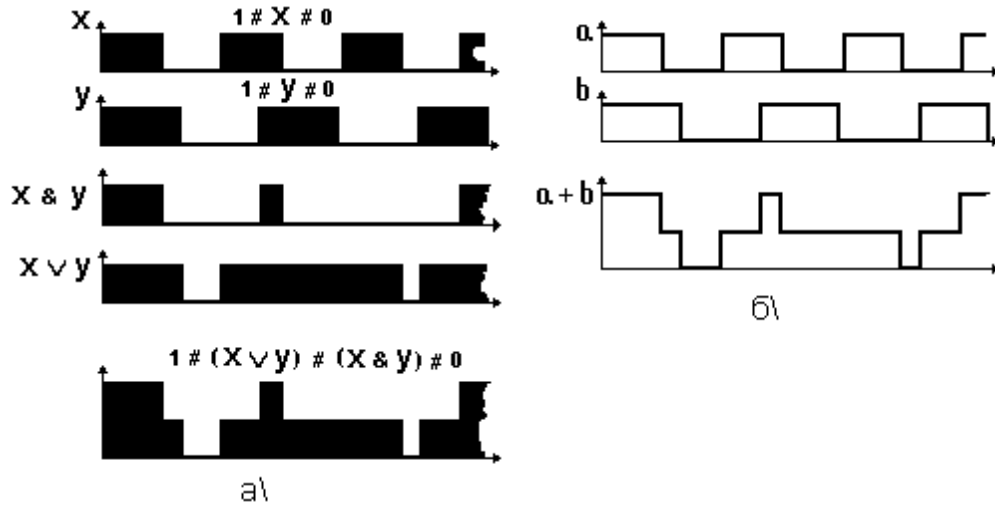
Так как набор симплексов из одного класса может быть любым, то и выбранная область определяет сигнал, который является лишь одним из представителей рассматриваемого класса. Ранее мы ввели специальное обозначение  $\omega(x)$  для класса сигналов, объединяющего всевозможные по форме сигналы с одинаковым периодом, и показали, что, если обозначать единицей моменты времени на линии симплекса и нулем моменты времени, где линия симплекса прерывается, то тогда класс  $\omega(x)$  запишется, как  $\omega(x) = 1 \# x \# 0$ , где  $\#$  знак совокупности.

Рассмотрим способы и средства математического описания сложения в рамках основной модели  $\langle I, \vee, \& \rangle$ . Ясно, что это должно быть алгоритмическое описание.

В рамках вспомогательной модели  $\langle F_I, + \rangle$  справедливо общепринятое представление о способе выполнения операции сложения, когда считается, что оно осуществляется путем суммирования мгновенных значений амплитуды в вертикальном направлении. Но в случае частей и симплексов это не так. Сложение частей обеспечивается принципиально иным способом, а именно, путем укладывания симплексов слагаемых друг на друга. Кроме этого в процессе укладывания происходит сортировка симплексов по длине, приводящая к тому, что более короткие по длине симплексы размещаются выше более длинных, так что в результате симплексы слагаемых оказываются расположенными упорядоченно. В связи с этим возможность описания сложения частей средствами алгоритмов тесно связана с возможностью проведения упорядочения симплексов, поскольку алгоритмическое описание укладывания симплексов очевидно.

Отметим, что, в общем случае произвольных по форме и ампли-

туде сигналов, при непрерывном изменении амплитуды в рамках основной модели алгоритм сложения отсутствует. Он существует только для некоторых частных случаев сигналов, например, когда складываются последовательности импульсов с одинаковой амплитудой, рис. 7.



**рис. 7. Сложение двух последовательностей импульсов: а) представление с помощью области б) представление с помощью линии**

Как видно из рисунка, для получения суммы необходимо выполнить операции "ИЛИ" и "И" для последовательностей импульсов, а результаты в определенном порядке разместить друг над другом. Математическое выражение для суммы можно записать следующим образом  $\omega(\Sigma) = 1 \# (x \vee y) \# (x \& y) \# 0$ . Здесь сложение сигналов с периодами  $T_1$  и  $T_2$  двух разных классов приводит к образованию сигнала нового класса  $\omega(\Sigma)$  с периодом  $T_\Sigma = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ , если  $T_1 > T_2$  (формула верна для случая сигналов соизмеримых по длительности периода).

Математическое выражение для суммы для общего случая множества сигналов в рамках основной модели можно получить не в непрерывной, а в квантованной области амплитуд. Процесс квантования, связанный с введением порога чувствительности, позволяет отказаться от рассмотрения составляющих сигнала с амплитудой меньше по-

рога квантования. В квантованной области амплитуд сигнал дробится на составляющие в виде последовательностей импульсов со стандартной амплитудой на уровнях квантования.

Очевидно, что при переходе из аналоговой в квантованную область амплитуд, пример с двумя последовательностями импульсов сохраняет свое значение. Его результат используется при доказательстве следующей общей теоремы.

**Теорема 3.1.** Класс  $\omega(\Sigma)$  аддитивных сигналов в квантованной области амплитуд определяется выражением в виде совокупности

$$\omega(\Sigma) = 1 \# \Psi_1(\Sigma, \xi) \# \Psi_2(\Sigma, \xi) \# \Psi_3(\Sigma, \xi) \# \dots \# \Psi_n(\Sigma, \xi) \# 0,$$

причем

$$\Psi_n(\Sigma, \xi) = x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots \& x_n$$

...

$$\Psi_3(\Sigma, \xi) = x_1 \& x_2 \& x_3 \vee x_1 \& x_2 \& x_4 \vee \dots \vee x_{n-2} \& x_{n-1} \& x_n$$

$$\Psi_2(\Sigma, \xi) = x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3 \vee x_1 \& x_4 \vee \dots \vee x_{n-1} \& x_n \quad (3.1)$$

$$\Psi_1(\Sigma, \xi) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_n,$$

где  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$ -обозначение частного класса для  $\omega(\Sigma)$  на  $i$  уровне квантования для выбранного способа  $\xi$  разбиения на кванты области амплитуд.

**Доказательство.** Для случая двух сигналов с одинаковой амплитудой утверждение теоремы было доказано. Отметим также, что симплекс, образующийся в результате логического умножения некоторых симплексов, либо равен по длине, либо короче симплекса, образующегося при выполнении логического сложения тех же симплексов. Поэтому преобразование пары исходных симплексов в пару результирующих симплексов с помощью этих двух операций можно рассматривать как операцию их упорядочения.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для случая

(n-1) сигналов в виде периодических последовательностей импульсов с амплитудой равной шагу квантования, относящихся к разным классам, тогда

$$\omega'(\Sigma) = 1 \# \Psi'_{1}(\Sigma, \xi) \# \Psi'_{2}(\Sigma, \xi) \# \Psi'_{3}(\Sigma, \xi) \# \dots \# \Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \# 0,$$

причем

$$\Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) = x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots \& x_{n-1}$$

...

$$\Psi'_{2}(\Sigma, \xi) = x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3 \vee x_1 \& x_4 \vee \dots \vee x_{n-2} \& x_{n-1}$$

$$\Psi'_{1}(\Sigma, \xi) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_{n-1}.$$

Возьмем еще один такой же сигнал своего класса  $\omega(x_n) = 1 \# x_n \# 0$  и произведем логическое объединение каждого  $\Psi'_{i}(\Sigma, \xi)$  и  $x_n$  путем выполнения логического сложения и, отдельно, логического умножения. При этом будет получено

$$\Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \& x_n$$

$$\Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \vee x_n$$

...

$$\Psi'_{1}(\Sigma, \xi) \& x_n$$

$$\Psi'_{1}(\Sigma, \xi) \vee x_n.$$

Здесь переменная  $x_n$  ровно (n-1) раз используется как слагаемое.

Произведем упорядочение логических выражений для пар строк путем выполнения логического сложения и умножения для двух соседних строк, выбирая для этого из пары строк с индексом  $i$  нижнюю строку, а из пары с индексом  $(i-1)$  верхнюю строку. В результате преобразования имеем

$$\Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \& x_n$$

$$(\Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \vee x_n) \& (\Psi'_{n-2}(\Sigma, \xi) \& x_n)$$

$$(\Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \vee X_n) \vee (\Psi'_{n-2}(\Sigma, \xi) \& X_n)$$

...

$$(\Psi'_2(\Sigma, \xi) \vee X_n) \& (\Psi'_1(\Sigma, \xi) \& X_n)$$

$$(\Psi'_2(\Sigma, \xi) \vee X_n) \vee (\Psi'_1(\Sigma, \xi) \& X_n)$$

$$\Psi'_1(\Sigma, \xi) \vee X_n.$$

Заметим, что преобразование упорядочения не меняет общего числа строк, так как для каждой пары строк была записана новая пара.

Перепишем логические выражения для строк, выполняя преобразования и учитывая, что  $\Psi'_i(\Sigma, \xi) \vee (\Psi'_{i-1}(\Sigma, \xi) \& X_n) = \Psi'_i(\Sigma, \xi)$ . Тогда имеем, опуская для простоты индексы в скобках, следующее

$$\Psi'_{n-1} \& X_n = \Psi_n(\Sigma, \xi)$$

$$(\Psi'_{n-1} \vee X_n) \& (\Psi'_{n-2} \& X_n) = [(\Psi'_{n-1} \& \Psi'_{n-2}) \vee (\Psi'_{n-2} \& X_n)] \& X_n =$$

$$= (\Psi'_{n-1} \vee \Psi'_{n-2} \& X_n) \& X_n = \Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \& X_n$$

$$(\Psi'_{n-1} \vee X_n) \vee (\Psi'_{n-2} \& X_n) = (\Psi'_{n-1} \vee \Psi'_{n-2} \& X_n) \vee X_n =$$

$$= \Psi'_{n-1}(\Sigma, \xi) \vee X_n$$

...

$$(\Psi'_2 \vee X_n) \& (\Psi'_1 \& X_n) = (\Psi'_1 \& \Psi'_2 \vee \Psi'_1 \& X_n) \& X_n =$$

$$= (\Psi'_2 \vee \Psi'_1 \& X_n) \& X_n = \Psi'_2(\Sigma, \xi) \& X_{n-2}$$

$$(\Psi'_2 \vee X_n) \vee (\Psi'_1 \& X_n) = (\Psi'_2 \vee \Psi'_1 \& X_n) = \Psi'_2(\Sigma, \xi) \vee X_n$$

$$\Psi'_1 \vee X_n = \Psi_1(\Sigma, \xi).$$

Полученные выражения являются окончательными в том смысле, что не нуждаются в дальнейшем упорядочении. Поэтому повторение парных преобразований уже не повлияет на вид полученных выражений.

Пары логических выражений, кроме двух крайних, можно рассмат-

ривать как результат сложения  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$  и  $X_n$ . Заменяем каждую такую пару одним выражением для составляющей  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$ . Такая замена эквивалентна исключению  $(n-2)$  прибавлений  $X_n$ , т.е. сохраняется только одно сложение с  $X_n$ . Совокупность оставшихся выражений образует утверждение теоремы, что и требовалось доказать. ♦

Выражение (3.1) в общем виде описывает сигнал суммы произвольных сигналов для квантованной области амплитуд и в этом смысле является универсальным. При необходимости из него могут быть получены математические выражения для частных случаев сочетания сигналов, также определяющих их в общем виде. Например, математическое выражение для частного случая, когда один из сигналов занимает несколько уровней квантования в квантованной области амплитуд, может быть получено, если часть переменных посчитать равными между собой. Аналогично, в случае, если число сигналов меньше  $n$ , часть переменных можно приравнять к нулю и т.д.

Снова вернемся к случаю непрерывного изменения амплитуды. Его можно считать результатом предельного перехода от случая квантованного пространства, возникающего при уменьшении порога квантования. Однако при этом в выражении (3.1) число логических уравнений становится бесконечным.

Преодолеть возникающие здесь математические трудности можно следующим образом. Откажемся от развернутой логической формы выражения, и будем использовать привычный знак плюс для обозначения операции сложения. При этом надо иметь в виду разное смысловое наполнение для этой операции в интервальной и классической моделях. С учетом этого в области непрерывного изменения амплитуды и времени сложение сигналов в рамках основной модели будет определяться как

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots = \sum_1^n x_n. \quad (3.2)$$

Таким образом, применение математических средств решетки для моделирования сигналов путем обозначения принадлежности их к некоторому классу по величине периода связано с увеличением степени неопределенности при рассмотрении конкретных сигналов. Запись для результата их сложения в аналоговой и квантованной областях амплитуды обеспечивается в форме выражений (3.2) и (3.1).

С математической точки зрения рассмотренный выше переход от квантованного пространства к непрерывному пространству и обратно, не что иное, как переход от конечномерной булевой алгебры к бесконечномерной булевой алгебре. При этом конечномерная булева алгебра в соответствии с теоремой Стоуна представима в виде поля множеств, включающего универсальное множество  $I$  и пустое множество, замкнутого относительно логических операций "И", "ИЛИ" и образования дополнений. В данном контексте эти математические утверждения возникают в определенной предметной области, имеют конкретный физический смысл и принимают форму конкретных математических выражений [13].

Уравнение для частного класса  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$  для  $i$  уровня квантования в (3.1) представляет собой элементарную симметрическую функцию (ЭСФ) и является дизъюнкцией, составляющие конъюнкции которой образованы как сочетания из  $x_1, x_2, \dots, x_n$  по  $i$ . Учитывая это, введем сокращенную запись частного класса в следующем виде

$$\Psi_i(\Sigma, \xi) = \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i(x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots). \quad (3.3)$$

Из аксиом булевой алгебры вытекают следующие формулы преобразования, связанные с элементарными симметрическими булевыми функциями



$$\Psi_i(\Sigma, \xi) \& \Psi_{i-1}(\Sigma, \xi) = \Psi_i(\Sigma, \xi) \quad (3.4)$$

$$\Psi_i(\Sigma, \xi) \vee \Psi_{i-1}(\Sigma, \xi) = \Psi_{i-1}(\Sigma, \xi).$$

Справедливо также следующее соотношение, позволяющее перейти к меньшему числу переменных

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i=1,2,\dots,m} C_m^i(x_1 \&x_2 \&x_3 \dots x_m) = \\ & = x_1 \& \bigcup_{i=1,2,\dots,(m-1)} C_{m-1}^{i-1}(x_2 \&x_3 \dots x_m) \vee \bigcup_{i=1,2,\dots,(m-1)} C_{m-1}^i(x_2 \&x_3 \dots x_m). \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Лемма 3.1.** Если любые  $s$  булевых переменных из  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равны нулю ( $s \leq n$ ), то  $s$  последних значений  $\Psi_s(\Sigma, \xi), \Psi_{s+1}(\Sigma, \xi), \dots, \Psi_n(\Sigma, \xi)$  равны нулю, остальные  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$  в совокупности образуют ЭСФ от  $(n-s)$  переменных.

**Доказательство.** Пусть переменная  $x_j = 0$ , тогда, используя формулу преобразования (3.5), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_i(\Sigma, \xi) &= \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i(x_1 \&x_2 \&\dots x_{j-1} \&x_j \&x_{j+1} \&\dots x_n) = \\ &= \bigcup_{i=1,2,\dots,(n-1)} C_{n-1}^i(x_1 \&x_2 \&\dots x_{j-1} \&x_{j+1} \&\dots x_n). \end{aligned}$$

При этом  $\Psi_n(\Sigma, \xi) = 0$ , что и требовалось доказать. ♦

**Лемма 3.2.** Если любые  $p$  булевых переменных из  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равны единице ( $p \leq n$ ), то  $p$  первых значений  $\Psi_1(\Sigma, \xi), \Psi_2(\Sigma, \xi), \dots, \Psi_p(\Sigma, \xi)$  равны единице, остальные  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$  в совокупности образуют ЭСФ от  $(n-p)$  переменных.

**Доказательство.** Пусть переменная  $x_j = 1$ , тогда, используя формулу преобразования (3.5), имеем

$$\begin{aligned}\Psi_i(\Sigma, \xi) &= \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i(x_1 \&x_2 \&\dots \&x_{j-1} \&x_j \&x_{j+1} \&\dots \&x_n) = \\ &= \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_{n-1}^{i-1}(x_1 \&x_2 \&\dots \&x_{j-1} \&x_{j+1} \&\dots \&x_n).\end{aligned}$$

При этом  $\Psi_1(\Sigma, \xi) = 1$ , что и требовалось доказать. ♦

### 3.2. Линейные интервальные преобразования и их модели

Поскольку сигнал представлен в теории в виде совокупности симплексов, то объектом преобразования становится симплекс. Будем называть преобразования, воздействующие на длину симплексов, интервальными преобразованиями. В этом они принципиально отличаются от классических преобразований, хотя всякое преобразование, в конечном счете, изменяет как амплитуду сигнала, так и длительность интервалов, образующих сигнал.

Понятие линейного интервального преобразования возникает при распространении на этот случай общего понятия о линейном преобразовании, которое исходит из наших интуитивных представлений о свойстве таких преобразований, связанном с обеспечением принципа суперпозиции.

Для этого сперва напомним, что классическое линейное пространство непрерывных функций с теоретической точки зрения устроено таким образом, что не имеет ограничений по размаху амплитуды сигнала. В связи с этим там возникает проблема обеспечения одинакового действия для преобразования при любом размере этого пространства. Для этого преобразования наделяются свойством однородности, которое задается с помощью второго условия пропорциональности действия в известном определении линейного преобразования.

Поскольку при времениподобном способе представления с самого начала вводится все пространство в виде области универсального множества, то требование однородности для преобразования может

быть заменено на эквивалентное требование воздействия преобразования на всю область пространства.

Интервальное преобразование  $\mathbf{P}$ , действующее из  $I$  в  $I$  будем называть линейным, если оно воздействует на все множество  $I$  и для любых  $x, y \in I$  линейного асимметричного пространства выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(x + y) = \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y). \quad (3.6)$$

**Лемма 3.3.** Если  $\mathbf{P}(a) = b$ , то  $\mathbf{P}(a') = b'$ .

**Доказательство.** По определению линейного интервального преобразования имеем  $\mathbf{P}(a+a') = \mathbf{P}(a) + \mathbf{P}(a') = b + \mathbf{P}(a')$ . С другой стороны  $\mathbf{P}(a+a') = \mathbf{P}(1) = \text{const}$ , так как удлинение и укорочение симплексов, тождественно равных единице, может привести только к изменению их числа. Следовательно  $b + \mathbf{P}(a') = \text{const}$ , откуда имеем  $\mathbf{P}(a') = b'$ , что и требовалось доказать. ♦

Базовые преобразования и устройства в новой теории можно определить в связи с задачей фильтрации. Отметим, что в классической теории в обеспечение симметрии линейное преобразование фильтрации является невырожденным, а задача базовой линейной фильтрации формулируется, как задача резонансной фильтрации. В новой теории условию асимметрии отвечает вырожденное преобразование. Это связано с тем, что в процессе изменения длины симплексов при укорочении часть симплексов может становиться равной нулю, а при удлинении равной единице, что в одинаковой мере означает невозстановливаемую потерю информации.

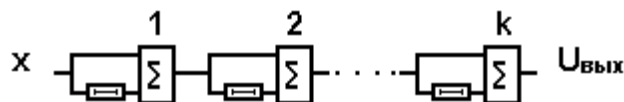
Известно, что все условия определения линейного преобразования обеспечиваются только в двух случаях, когда используется линейная стационарная система с невырожденными преобразованиями, либо когда используется линейная стационарная система с вырожденными преобразованиями. По существу содержание работы можно определить и как выделение линейных стационарных систем с вырожденными преобразованиями.

денными преобразованиями в отдельный тип систем со своими математическими средствами моделирования, обеспечивающими их точное моделирование, аналогично тому, как это имеет место в случае классического представления линейных стационарных систем с невырожденными преобразованиями.

Однако в существующем виде системы с вырожденными преобразованиями не удовлетворяют условиям теории, так как они расширены до симметричного случая входных сигналов, в соответствии с особенностями классической теории.

Рассмотрим это более подробно. Поскольку фильтрация заключается в выделении некоторого класса сигналов по отношению ко всем другим классам, то для ее выполнения необходимо каким либо способом задать длину интервала, равного величине периода выделяемого класса. Проще всего это можно сделать с помощью линии задержки, являющейся частью накапливающего фильтра.

В связи с этим в новой теории в качестве средства преобразования рассматриваются всевозможные накопители. Благодаря асимметрии пространства сигналов в новой теории должно использоваться простейшее устройство накапливающего фильтра. Будем называть его интервальным фильтром для непрерывной области амплитуд (ИФН). Он представляет собой сумматор для однополярных сигналов, на один вход которого входной сигнал  $x$  поступает непосредственно, а на другой вход - через линию задержки, рис. 8.



**рис. 8. Интервальный фильтр для непрерывной области**

В этом заключается его отличие от накопителей, рассматриваемых в классической теории, использующих сумматор - вычитатель, способный вырабатывать знак результата и функционировать в условиях поступления входных сигналов разной полярности.

В случае цепочки из  $k$  включенных последовательно одинаковых ИФН, ее работа описывается следующим алгебраическим уравнением

$$(x+x^*)+(x+x^*)^*+[(x+x^*)+(x+x^*)]^*+...=\sum_{i=0}^k C_k^i X^{*i}, \quad (3.7)$$

где  $i$  – номер каскада,  $*$  обозначает задержку на время  $T_{ЛЗ}$ , а  $*i$  обозначает задержку на время  $iT_{ЛЗ}$ .

Общая теорема о сложении, приведенная ниже, рассматривает выполнение этой операции в рамках основной модели и позволяет получить устройство для задачи накапливающей фильтрации в квантованной области амплитуд.

**Теорема 3.2.** Пусть даны две совокупности ЭСФ с разными переменными  $\bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots x_n)$  и  $\bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (y_1 \& y_2 \& y_3 \& \dots y_n)$ ,

имеющие одинаковую мощность  $n$ , тогда выполнение для каждой одноименной пары логических функций логических операций сложения и умножения между ними и преобразование  $2n$ , полученных новых логических функций с помощью оператора в виде совокупности ЭСФ мощности  $2n$ , преобразует исходные совокупности ЭСФ в совокупность ЭСФ для двойного числа переменных

$$\bigcup_{k=1,2,\dots,2n} C_{2n}^k (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_n \& y_n).$$

**Доказательство.** Выполнение логических операций сложения и умножения для каждой пары логических функций можно записать так

$$Z_{2i} = \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots x_n) \& \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (y_1 \& y_2 \& y_3 \& \dots y_n),$$

$$Z_{2i-1} = \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots x_n) \vee \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (y_1 \& y_2 \& y_3 \& \dots y_n),$$

что соответствует увеличению числа логических функций в два раза. Доказательство теоремы проведем по индукции. Пусть даны две

совокупности ЭСФ от двух переменных  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$

$$\bigcup_{i=1,2} C_2^i(x_1 \& x_2), \quad \bigcup_{i=1,2} C_2^i(y_1 \& y_2) .$$

Обозначим соответствующие им логические функции

$$x_1 \vee x_2 = a, \quad y_1 \vee y_2 = b, \quad x_1 \& x_2 = c, \quad y_1 \& y_2 = d$$

Выполнение логических операций сложения и умножения приводит к следующим логическим функциям

$$Z_4 = c \& d, \quad Z_2 = a \& b, \quad Z_3 = c \vee d, \quad Z_1 = a \vee b.$$

В этом случае совокупность ЭСФ для переменных  $Z_k$  имеет вид

$$g_4 = Z_1 \& Z_2 \& Z_3 \& Z_4$$

$$g_3 = Z_1 \& Z_2 \& Z_3 \vee Z_1 \& Z_2 \& Z_4 \vee Z_1 \& Z_3 \& Z_4 \vee Z_2 \& Z_3 \& Z_4$$

$$g_2 = Z_1 \& Z_2 \vee Z_1 \& Z_3 \vee Z_1 \& Z_4 \vee Z_2 \& Z_3 \vee Z_2 \& Z_4 \vee Z_3 \& Z_4$$

$$g_1 = Z_1 \vee Z_2 \vee Z_3 \vee Z_4 .$$

Подстановка значений  $Z_k$  в логические функции после простых преобразований и упрощения с учетом (3.4) приводит к следующим соотношениям

$$g_4 = a \& b \& c \& d = c \& d$$

$$g_3 = a \& b \& c \vee a \& b \& d \vee a \& c \& d \vee b \& c \& d = b \& c \vee a \& d$$

$$g_2 = a \& b \vee a \& c \vee a \& d \vee b \& c \vee b \& d \vee c \& d = a \& b \vee c \vee d$$

$$g_1 = a \vee b \vee c \vee d = a \vee b$$

Заменяя  $a, b, c, d$  их значениями, получаем

$$g_4 = x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2$$

$$g_3 = x_1 \& y_1 \& x_2 \vee x_1 \& y_1 \& y_2 \vee x_1 \& x_2 \& y_2 \vee y_1 \& x_2 \& y_2$$

$$g_2 = x_1 \& y_1 \vee x_1 \& x_2 \vee x_1 \& y_2 \vee y_1 \& x_2 \vee y_1 \& y_2 \vee x_2 \& y_2$$

$$g_1 = x_1 \vee y_1 \vee x_2 \vee y_2,$$

что и доказывает утверждение теоремы для двух переменных, так как совокупность ЭСФ, образованная на основе переменных

$x_1, y_1, x_2, y_2$  имеет вид  $g_k = \bigcup_{k=1,2,3,4} C_4^k (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2)$ .

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для  $(n-1)$  переменных. Покажем, что это утверждение справедливо и для  $n$  переменных.

Справедливость утверждения теоремы для  $(n-1)$  переменных означает, что имеют место следующие соотношения:

при наличии

$$\bigcup_{i=1,2,\dots,(n-1)} C_{n-1}^i (x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots x_{n-1}) \text{ и } \bigcup_{i=1,2,\dots,(n-1)} C_{n-1}^i (y_1 \& y_2 \& y_3 \& \dots y_{n-1}),$$

после всех преобразований формируется совокупность ЭСФ  $(2n-2)$  переменных

$$g_k = \bigcup_{k=1,2,\dots,(2n-2)} C_{2n-2}^k (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1}),$$

и при этом используемая для преобразования совокупность ЭСФ имеет вид  $\bigcup_{k=1,2,\dots,(2n-2)} C_{2n-2}^k (z_1 \& z_2 \& \dots z_{2n-2})$ .

Перейдем к случаю  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Пусть две новые переменные  $x_n$  и  $y_n$  принимают нулевые значения, тогда в соответствии с логическими выражениями для  $Z_{2i}$  и  $Z_{2i-1}$  и по лемме 3.1 имеем  $Z_{2n} = Z_{2n-1} = 0$ , а, следовательно, и  $g_{2n} = g_{2n-1} = 0$ . Поскольку оставшиеся переменные  $x_i$  и  $y_i$  образуют каждая совокупность ЭСФ  $(n-1)$  переменных и в соответствии с леммой 3.1 совокупность ЭСФ для  $2n$  переменных  $Z_k$  также преобразуется в совокупность ЭСФ  $(2n-2)$  переменных  $Z_k$ , то по предположению имеем

$$g_k = \bigcup_{k=1,2,\dots,(2n-2)} C_{2n-2}^k (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1}).$$

Пусть новые переменные  $x_n$  и  $y_n$  равны единице, тогда в соответ-

ствии с логическими выражениями для  $Z_{2i}$  и  $Z_{2i-1}$  и по лемме 3.2 получим  $Z_1 = Z_2 = 1$ , а, следовательно, и  $g_1 = g_2 = 1$ . Поскольку оставшиеся переменные  $x_i$  и  $y_i$  образуют каждая совокупность ЭСФ  $(n-1)$  переменной и в соответствии с леммой 3.2 совокупность ЭСФ для  $2n$  переменных  $Z_k$  также преобразуется в совокупность ЭСФ  $(2n-2)$  переменных, то по предположению имеем

$$g_k = \bigcup_{k=3,4,\dots,2n} C_{2n-2}^{k-2} (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1}).$$

И, наконец, пусть новые переменные принимают значения  $x_n = 1$ ,  $y_n = 0$  или  $x_n = 0$ ,  $y_n = 1$ . Аналогичные рассуждения при использовании леммы 3.1 и леммы 3.2 приводят к следующим соотношениям

$$g_k = \bigcup_{k=2,3,\dots,(2n-1)} C_{2n-2}^{k-1} (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1}),$$

$$g_1 = 1.$$

В общем случае произвольных значений  $x_n$  и  $y_n$  это можно записать как

$$\begin{aligned} g_k = & \{(x_n \& y_n) \& \bigcup_{k=3,4,\dots,2n} C_{2n-2}^{k-2} (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1})\} \vee \\ & \vee \{(x_n \vee y_n) \& \bigcup_{k=2,3,\dots,(2n-1)} C_{2n-2}^{k-1} (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1})\} \vee \\ & \vee \bigcup_{k=1,2,\dots,(2n-2)} C_{2n-2}^k (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_{n-1} \& y_{n-1}) \vee \\ & \vee \{(x_n \& y_n) \& \bigcup_{k=1,2} C_1^1(1)\} \vee \{(x_n \vee y_n) \& \bigcup_{k=1,2} C_1^1(1)\}. \end{aligned}$$

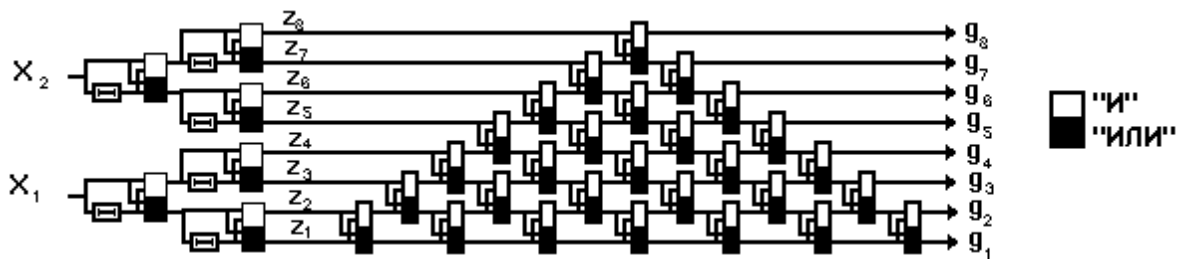
С учетом формулы преобразования к меньшему числу переменных (3.5), использованной два раза, это выражение приводится к виду

$$g_k = \bigcup_{k=1,2,\dots,2n} C_{2n}^k (x_1 \& y_1 \& x_2 \& y_2 \dots x_n \& y_n),$$



что и требовалось доказать. ♦

Доказанная теорема по существу описывает алгоритм фильтрации, содержащий две части. Первая часть связана с изменением числа симплексов в представлении сигнала, а вторая - с сортировкой симплексов по длительности. Соответствующая схема устройства интервального накапливающего фильтра для квантованной области амплитуд (ИФК), реализующего рассмотренный алгоритм, приведена на рис. 9.



**рис. 9. Интервальный фильтр для квантованной области (ИФК)**

В этой схеме использованы одинаковые линии задержки, обеспечивающие задержку на время  $T_0$ , равное величине периода выделяемого класса сигналов. Схема содержит  $k$  ступеней фильтрации, включенных последовательно. Количество выходных шин после каждой ступени фильтрации увеличивается вдвое. Чем больше ступеней фильтрации, тем больше избирательность фильтра. Вторая часть фильтра - это сортирующее устройство, обеспечивающее формирование выходного квантованного сигнала.

Фильтр ИФК в квантованной области амплитуд и фильтр ИФН в непрерывной области амплитуд связаны друг с другом и образуют систему базовых устройств новой теории. Они являются накопительными и реализуемыми устройствами, обеспечивающими базовые преобразования. Эти преобразования являются вырожденными. Тем не менее, в них обеспечивается принцип суперпозиции. Аналитические выражения, предложенные в работе, и соответствующие им устройства, точно

соответствуют друг другу в том смысле как это принято в книге.

Здесь использован принципиально иной способ линейного преобразования. Он основан не на одновременном растяжении или сжатии всех значений амплитуды, а на одновременном увеличении или уменьшении длины всех интервалов на определенную величину. Амплитуда здесь также изменяется в конечном счете, но это вторичный процесс при преобразовании.

Ранее мы рассмотрели алгоритм перехода от части  $x$  к ее дополнению  $\bar{x}(\uparrow)$ , упорядоченному одинаковым образом с  $x$ . Теперь справедливость такого перехода можно строго доказать.

**Теорема 3.3.** Инвертирование совокупности симплексов, связанных с сигналом  $x$ , и их сортировка с помощью совокупности ЭСФ

$$\bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (z_1 \& z_2 \& \dots) \text{ обеспечивает переход к его дополнению } \bar{x}(\uparrow).$$

**Доказательство.** Пусть имеется произвольный сигнал класса  $\omega(\Sigma)$ , заданный совокупностью ЭСФ (3.1). Выполним инвертирование логических функции для всех частных классов  $\Psi_i(\Sigma, \xi)$ . Инвертирование симплексов конкретного сигнала в квантованной области амплитуд равносильно переходу от позитивного изображения к негативному для принятого в работе представления сигнала.

Логические функции, входящие в совокупность ЭСФ и равноотстоящие от верхнего частного класса  $\Psi_n(\Sigma, \xi)$  и нижнего частного класса  $\Psi_1(\Sigma, \xi)$  при инвертировании переходят друг в друга с заменой логических переменных на инверсные. Для нечетных  $n$  логическая функция, равноудаленная от верхней и нижней логических функций (средняя)  $\Psi_{\frac{n+1}{2}}(\Sigma, \xi) = \bigcup C_n^{\frac{n-1}{2}} (x_1 \& x_2 \& \dots)$  является самодвойственной логической функцией.

Эта функция, обладает свойством не изменять свой вид при инвертировании. Для нее инвертирование сводится к замене

переменных на инверсные.

После преобразования получаем совокупность ЭСФ  $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega}(\Sigma) = 0 \# \bar{\Psi}_1(\Sigma, \xi) \# \bar{\Psi}_2(\Sigma, \xi) \# \bar{\Psi}_3(\Sigma, \xi) \# \dots \# \bar{\Psi}_n(\Sigma, \xi) \# 1,$$

причем

$$\bar{\Psi}_n(\Sigma, \xi) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \dots \vee \bar{x}_n$$

$$\bar{\Psi}_{n-1}(\Sigma, \xi) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_4 \vee \dots \vee \bar{x}_{n-1} \& \bar{x}_n$$

...

$$\bar{\Psi}_1(\Sigma, \xi) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \& \dots \& \bar{x}_n.$$

Преобразование  $\bigcup_{i=1,2,\dots,n}^i (z_1 \& z_2 \& \dots)$  является преобразованием

сортировки. В результате сортировки происходит замена логического выражения для  $\bar{\Psi}_{n-i+1}(\Sigma, \xi)$  на логическое выражение для  $\bar{\Psi}_i(\Sigma, \xi)$ ,

что приводит к

$$\bar{\Psi}_n(\Sigma, \xi) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \& \dots \& \bar{x}_n$$

...

$$\bar{\Psi}_2(\Sigma, \xi) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_4 \vee \dots \vee \bar{x}_{n-1} \& \bar{x}_n$$

$$\bar{\Psi}_1(\Sigma, \xi) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \dots \vee \bar{x}_n$$

или в сокращенной записи к совокупности ЭСФ

$$\bigcup_{i=1,2,\dots,n}^i (\bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \dots).$$

Полученная совокупность описывает дополнение  $\bar{X}(\uparrow)$ . Чтобы проверить это просуммируем исходный сигнал  $x$  и сигнал его дополнения  $\bar{X}(\uparrow)$ . Это означает, что необходимо провести объединение выра-

жений для совокупности ЭСФ  $\bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i(x_1 \& x_2 \& \dots)$  и совокупности ЭСФ

$\bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i(\bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \dots)$  с помощью выражения для совокупности ЭСФ

$\bigcup_{k=1,2,\dots,2n} C_{2n}^k(z_1 \& z_2 \& \dots z_{2n})$  в новую совокупность. Полученная в резуль-

тате этого объединения совокупность равна

$$\Psi_n(\Sigma, \xi) = x_1 \& \bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_2 \& \dots \& x_n \& \bar{x}_n$$

...

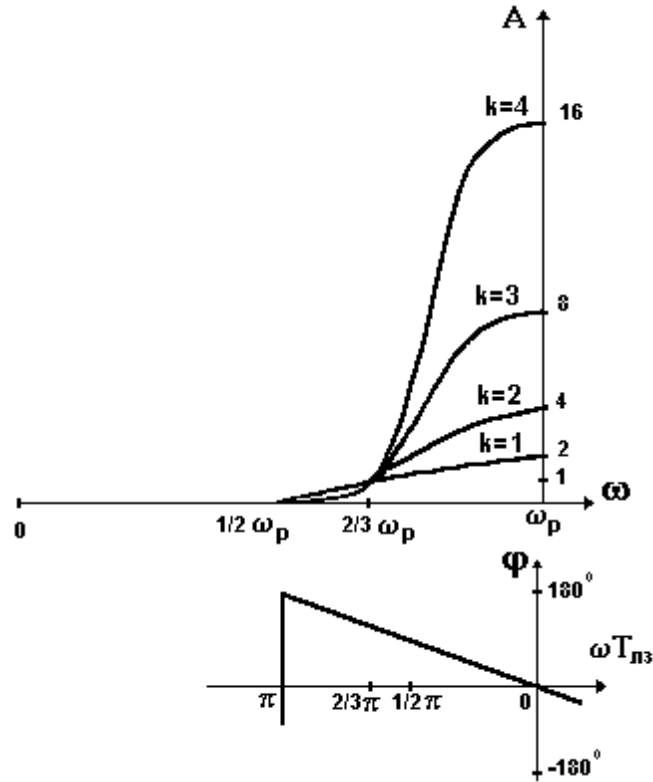
$$\Psi_2(\Sigma, \xi) = x_1 \& \bar{x}_1 \vee x_1 \& x_2 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \vee \dots \vee x_n \& \bar{x}_n$$

$$\Psi_1(\Sigma, \xi) = x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \dots \vee x_n \vee \bar{x}_n$$

В этой совокупности  $\Psi_i(\Sigma, \xi) = 0$ , для  $i > \frac{n}{2}$ ,  $\Psi_i(\Sigma, \xi) = 1$ , для  $i \leq \frac{n}{2}$ , и, следовательно, она описывает сигнал постоянного напряжения. Тем самым утверждение теоремы доказано. ♦

Снова рассмотрим цепочку каскадов, содержащую  $k$  ступеней фильтрации, возникающую при последовательном соединении  $k$  одинаковых ИФН или ИФК. В принципе для ИФН и ИФК нельзя говорить о частотной характеристике ее работы, а можно говорить о характеристике передачи разных классов, т.е. сигналов с разными периодами. Составить себе представление об этой характеристике вполне можно по частотной характеристике классической системы, образованной последовательным включением накапливающих фильтров, построенных с использованием сумматоров - вычитателей с переносом.

Частотная характеристика классического накапливающего фильтра определяется как обычно по реакции на гармонический сигнал с переменной частотой  $\omega$ .



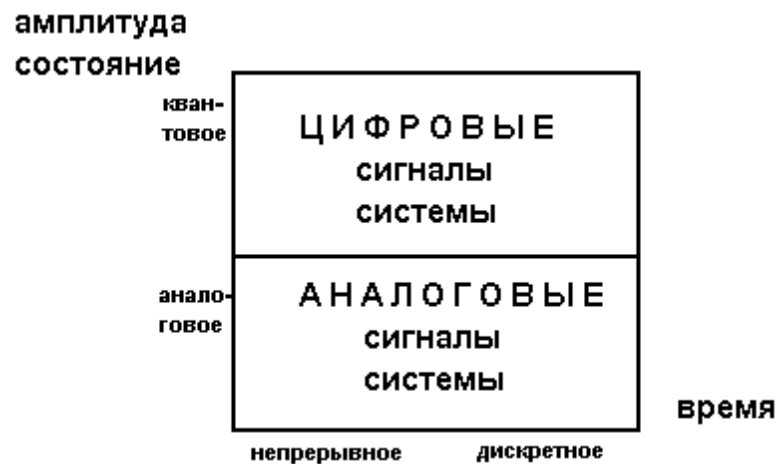
**рис. 10. Амплитудная и фазовая характеристики накапливающего фильтра**

Поскольку задержка приводит к образованию фазового сдвига у гармонического сигнала, то, с учетом этого, после  $k$  ступеней фильтра имеем на выходе

$$\begin{aligned} & \sin \omega t + \sin(\omega t - \varphi) + [\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 2\varphi)] + \dots = \\ & = 2^k \cos^k \frac{\varphi}{2} \sin(\omega t - k \frac{\varphi}{2}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Амплитудная и фазовая характеристики накапливающего фильтра для разного числа  $k$  ступеней фильтра и при  $\frac{1}{2} \omega_p \leq \omega < \omega_p$  показаны на рис. 10. Для области частот  $\omega_p < \omega \leq \frac{3}{2} \omega_p$  амплитудная характеристика получается путем симметричного повторения. Частотная характеристика для всей области частот накапливающего фильтра является гребенчатой, т.к. периодически повторяется. Ее точками резонанса яв-

ляются следующие значения частоты  $\omega_p, 2\omega_p, 3\omega_p, \dots$ .



**рис. 11. Классификация сигналов и систем при времениподобном представлении**

Амплитудная характеристика фильтра содержит две характерные точки. Точка, соответствующая частоте  $\frac{2}{3}\omega_p$ , является точкой единичного усиления (неподвижная точка). Гармонический сигнал с этой частотой проходит через фильтр без изменения своей амплитуды независимо от числа  $k$  ступеней фильтра. Точка, соответствующая частоте  $\frac{1}{2}\omega_p$ , является точкой нулевого усиления. Гармонический сигнал с частотой  $\frac{1}{2}\omega_p$  через фильтр не проходит.

Системы, рассматриваемые во времениподобной теории, также разбиваются на классы систем. Однако это разбиение отличается от разбиения на классы в классической теории. В то время как в классической теории, применяющей пространственноподобный способ представления, все системы делятся на класс непрерывных и класс импульсных систем, во времениподобной теории множество систем очевидным образом также делится на два класса: на класс аналоговых и класс цифровых систем рис. 11.

### 3.3. Сравнение двух способов выполнения операции сложения

Сложением мы называем не математическую, а физически осуществляемую в действительности операцию над сигналами, в результате которой происходит объединение нескольких сигналов в один сигнал. В классической теории, в которой сигналы заменены на функции, операция сложения обеспечивается путем арифметического суммирования мгновенных значений амплитуды. В интервальной теории сигналы представляются совокупностью симплексов. Сложение здесь обеспечивается путем укладывания симплексов друг на друга в процессе сортировки их по длительности.

Рассмотрим случай симметричного линейного пространства, т.е. множество произвольных двуполярных сигналов, определяемых через функцию. Опишем алгоритм выполнения операции суммирования. Обычная процедура суммирования заключается в том, что для пары функций  $f(t)$  и  $g(t)$  рассматривают пару чисел  $\alpha = f(t_0)$  и  $\beta = g(t_0)$  для одного и того же момента времени  $t_0$ . Эти числа могут быть как положительными, так и отрицательными. Естественное представление чисел называют представлением в прямом значении. Особенность способа арифметического суммирования числа в прямом значении состоит в том, что правила суммирования оказываются разными для положительных и отрицательных чисел. Эти правила сводятся к следующему:

- сравнить алгебраические знаки чисел, если знаки одинаковые, то выполнить суммирование, если - различные, то выполнить вычитание;
- сравнить абсолютные величины чисел и определить, какое из них меньше;
- суммировать абсолютные величины чисел или, соответственно, вычесть из большей абсолютной величины меньшую;
- результату суммирования приписать алгебраический знак первого слагаемого, а результату вычитания - алгебраический знак

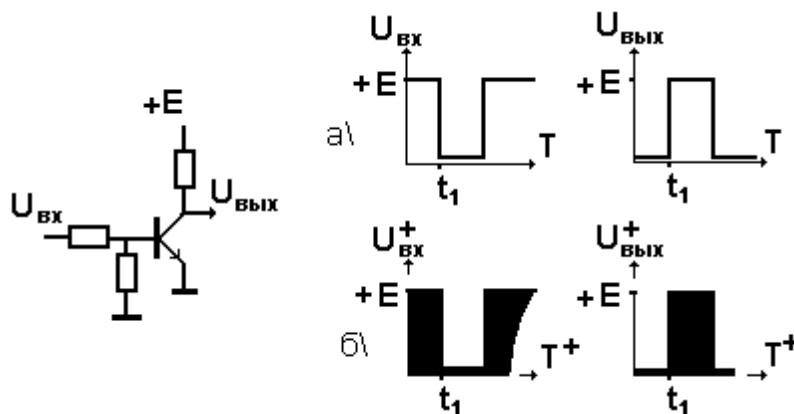
уменьшаемого [14].

Таким образом для выполнения суммирования требуется сумматор - вычитатель  $\Sigma B$ , а общая блок схема устройства суммирования имеет вид, показанный на рис. 12.



**рис. 12. Сложение путем суммирования с числом в прямом значении**

Здесь и далее для удобства будем рассматривать массив чисел для значений амплитуды в следующих пределах:  $+0.999 \div +0.000$  и  $-0.000 \div -0.999$ . Считается, что разряд знака принимает значение нуля для положительных чисел и единицы - для отрицательных.



**рис. 13. Транзисторный инвертор: а) моделирование с помощью функции б) моделирование с помощью области**

Практическая реализация такого устройства вызывает достаточно серьезные трудности. И дело здесь не только в определенной сложности устройства, а главным образом в несовместимости со свойствами транзисторного каскада как основного элемента построения суммато-



ров.

Основная схема транзисторного инвертора показана на рис. 13. Если попытаться представить себе физическую сущность его работы, то невозможно в принципе определить, обеспечивается ли работа инвертора путем преобразования амплитуды (поворот на сто восемьдесят градусов вектора мгновенного значения амплитуды) или путем преобразования симплексов (переход от позитивного изображения к негативному). Такая постановка вопроса в прямом его понимании некорректна. Однако, в силу явной асимметрии каскада, что обусловлено особенностями транзистора как физического прибора, приводящими к использованию источника питания только одной полярности, методы времениподобного представления здесь явно предпочтительны для описания его работы. Это в полной мере подтверждает и практический опыт построения устройств на базе транзисторного инвертора, наилучшим и самым простым образом обеспечивающего создание логических устройств, работающих с сигналами только одной полярности и логическими операциями для этих сигналов.

На практике несовместимость свойства асимметрии транзистора и каскада инвертора на транзисторе, с одной стороны, и симметрия для пространства значений амплитуды входных сигналов, с другой стороны, преодолевается с помощью введения дополнительных кодов. Благодаря им, полупространство отрицательных значений чисел перемещается в область положительных значений, превращая тем самым все пространство в подобие асимметричного пространства.

Для этого сначала вводится ограничение для максимального значения в области амплитуд. Далее, поскольку ноль с отрицательным знаком уже не используется, то вместо этого на одно значение увеличивается массив отрицательных чисел. Весь массив чисел для значений амплитуды становится таким  $+0.999 \div +0.000$  и  $-0.001 \div -1.000$ . При использовании дополнительных кодов вместо массива  $-0.001 \div -1.000$  и  $+0.999 \div +0.000$  используется массив  $+1.999 \div +1.000$  и  $+0.999 \div$

+0.000 .



**рис. 14. Сложение путем суммирования с числом в дополнительном коде**

Такое преобразование позволяет упростить операцию суммирования, исключив из нее вычитание. Устройство суммирования становится таким, как показано на рис. 14. В нем можно применять теперь комбинационный сумматор, который выполняется на логических элементах, использующих источник питания одной полярности.

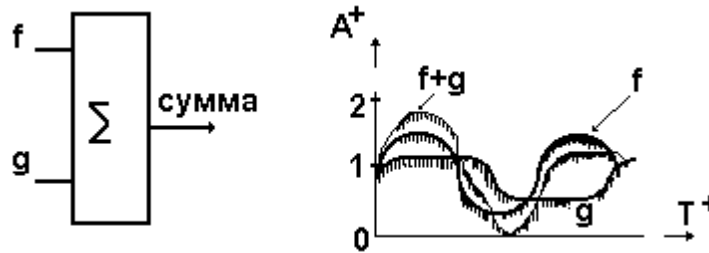
Однако в процессе суммирования необходимо следить за переносом в разряд знака. При суммировании двух положительных чисел не должно быть переноса в разряд знака. При суммировании двух отрицательных чисел перенос в разряд знака должен быть обязательно. Это означает, что суммирование происходит в пределах установленного размера области амплитуд и, что нет переполнения разрядной сетки. Правила суммирования при этом способе такие:

- если число отрицательное, то заменить его на дополнительное значение;
- выполнить суммирование;
- если полученное значение относится к области дополнитель-

ных значений, то перевести его в прямое значение.

Полученное значение неверно, если имел место перенос в разряд знака или не было переноса в оговоренных выше случаях.

Не трудно представить себе, что устройство суммирования будет наиболее простым, если все значения чисел располагаются только в положительной области амплитуд, т.е. в случае линейного симметричного полупространства (но не подпространства) или линейного асимметричного пространства сигналов, рис. 15.



**рис. 15. Сложение путем укладывания симплексов**

Сложение в этом случае удобнее считать результатом складывания (укладывания) симплексов. Здесь не требуется специального разряда для представления знака чисел, так как все числа заведомо одного знака.

Другая особенность сумматора состоит в том, что процедура укладывания симплексов протекает параллельно на всех уровнях и не требует использования сигнала переноса из одного разряда в другой. В связи с этим, слагаемые могут поступать на вход устройства сложения непрерывно, а собственно процесс сложения может быть существенно ускорен по сравнению с работой классического сумматора. Однако при этом способе представления время от времени возникает смещение нулевой линии, устранение которого требует выполнения специальной операции нормализации.

В классическом способе представления действие по увеличению размеров объектов, вообще говоря, производится с помощью операции суммирования, а уменьшение - с помощью вычитания. Покажем, что в интервальном способе представления, где есть только одна опе-

рация сложения, эти оба действия также осуществимы.

В качестве примера рассмотрим сложение двух одинаковых синусоидальных сигналов, сдвинутых один относительно другого на угол  $\varphi$ . Для пояснения существа вопроса можно воспользоваться классическими средствами описания. Имеем здесь

$$\sin \omega t + \sin(\omega t + \varphi) = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin(\omega t + \frac{\varphi}{2}).$$

При сдвиге фаз равном  $\varphi = 60^\circ$  сигнал сохраняет свою амплитуду, при уменьшении сдвига фаз амплитуда постепенно увеличивается до двойной величины, при увеличении сдвига фаз - амплитуда убывает, причем при  $\varphi = 180^\circ$  она становится равной нулю.

### **3.4. Представление периодических сигналов с помощью последовательности признаков**

Функция  $y=f(t)$  - одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одной переменной величины от другой. Функция – классическое средство моделирования вообще и периодических процессов в частности. Применение функций приводит к гармоническому анализу сигналов. Переход же к представлению в рамках теории решеток приводит к другому способу анализа объектов. Этот способ заключается в представлении объектов с помощью системы признаков.

Рассмотрим сперва основные свойства разложения на составляющие при моделировании сигналов функциями. Отметим, что основное преимущество использования функции заключается в том, что правило отнесения значениям времени  $t$  соответствующих им значений амплитуды  $\alpha$  чаще всего задается формулой, устанавливающей, какие вычислительные операции надо произвести над переменной  $t$ , чтобы найти  $\alpha$ . При этом левая часть формулы является обозначением или именем объекта, а правая часть формулы - моделью объекта, отнесенная к его амплитудному значению.

К вычислительным аналитическим операциям, кроме четырех

действий арифметики, принято относить также операции перехода к пределу, т.е. нахождение по заданной последовательности чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  ее предела  $\lim \alpha_n$ , если он существует, хотя никаких общих способов производства этой операции нет.

Известно, что аналитически изобразимая функция, это функция, значения которой получаются из значений  $t$  и постоянных величин при помощи арифметических действий и предельных переходов.

Гармоническая синусоидальная функция является элементарной аналитически изобразимой функцией

$$\sin t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \right] \quad (3.9)$$

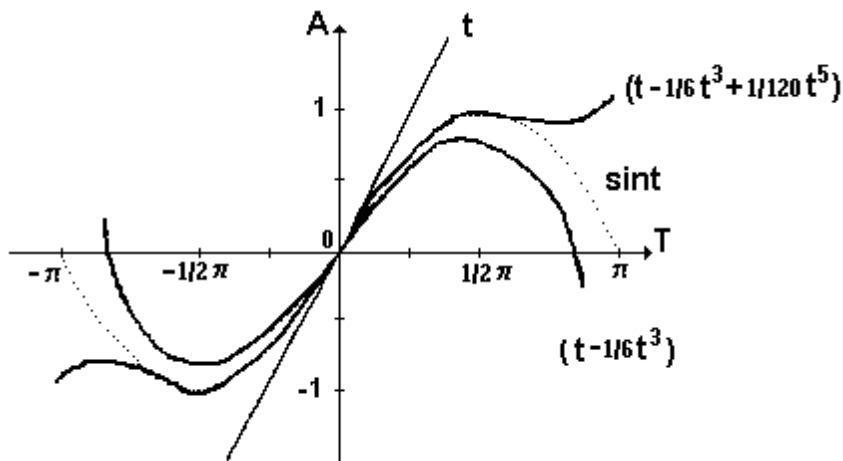
На примере гармонической синусоидальной функции рассмотрим основные особенности классической модели по отношению к определяемому ею периодическому сигналу.

Первая особенность связана с тем, что знакопеременный ряд, лежащий в основе аналитического выражения для функции, обеспечивает приближение соответствующего периодического сигнала вполне определенным образом. Воспроизведение периодического сигнала начинается с первого периода от начала координат, и с увеличением числа членов ряда  $n$  распространяется в обе стороны от начала координат. Это обусловлено тем, что ряд образован степенными функциями

вида  $\frac{t^n}{n!}$ , а график такой функции при увеличении значения  $n$  все

более "прижат" к нулевой линии в начале координат и "начинает работать", давать вклад в образование результирующей формы кривой на все более отдаленных периодах, рис. 16 [15].

Качественно этот процесс приближения можно охарактеризовать так: с увеличением числа членов ряда  $n$  растет число воспроизводимых периодов сигнала.



**рис. 16. Представление гармонической функции степенным рядом**

Далее сравним между собой аналитические представления в виде ряда для разных сигналов. Выберем для примера три разных, но хорошо известных сигнала

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\exp(-x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots \quad (3.10)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Выбранные примеры относятся к сигналам, существенно отличающимся друг от друга по форме кривых, их представляющих, при их визуальном восприятии. Экспоненциальный сигнал это апериодический сигнал, а косинусоидальный сигнал это периодический сигнал. Тем не менее, даже такая существенная разница на уровне аналитических представлений в виде ряда напрямую не прослеживается.

В этом заключается вторая особенность классического представления, которое, как известно, ориентировано на отображение спектрального состава рассматриваемого сигнала, а не на отображение особенностей его формы.

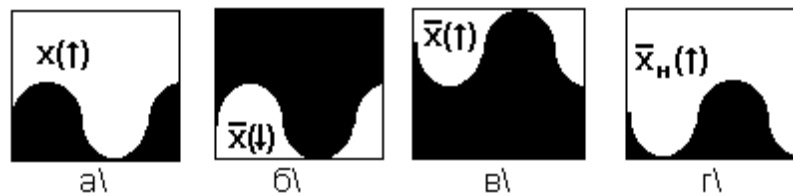
Рассмотрим элементарные преобразования для сигналов как объ-

ектов, являющихся составными частями множества структуры  $\langle I, \vee, \& \rangle$ . Рассмотрим сначала случай одного сигнала.

При использовании одного сигнала в теории установлены следующие возможные преобразования.

Преобразование перехода к дополнению. Инверсия сигнала, которая осуществляется путем инвертирования симплексов на всех уровнях напряжения в пределах размаха амплитуды области  $I$ , обеспечивает переход от сигнала  $x$  к его дополнению  $\bar{x}$ .

Представление с помощью области показывает, что такое преобразование можно рассматривать как переход от позитивного изображения к негативному изображению в пределах области  $I$  и к смещению изображения в вертикальном направлении, рис. 17.



**рис. 17. Преобразование  $x(\uparrow)$  в  $\bar{x}_H(\uparrow)$ : а) исходный сигнал б) дополнительный сигнал в) дополнительный сигнал после сортировки г) нормализованный дополнительный сигнал**

Преобразование сортировки. Пусть задана область амплитуд разбитая на  $n$  уровней путем квантования. В общем виде класс  $\omega(\Sigma)$  всех сигналов в этой области амплитуд определяется с помощью совокупности вида (3.1).

Сортировку сигнала будем проводить с помощью логического устройства сортировки, реализованного, например, на логических элементах "И" и "ИЛИ", соединенных между собой по схеме на рис. 9 (стр. 57).

При поступлении сигнала  $x$ , занимающего некоторое произвольное число уровней квантования, значениям  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , присваивают-

ся значения симплексов сигнала  $x$  на соответствующих уровнях квантования. В результате в данном устройстве выполняется сортировка симплексов, обеспечивающая упорядоченное размещение симплексов и такое, что более короткие по длине симплексы размещаются выше более длинных.

Преобразование смещения. Рассматривается смещение сигнала как во времени, так и по амплитуде. Смещение во времени осуществляется путем сдвига всех симплексов на одинаковую величину задержки в горизонтальном направлении. Смещение по амплитуде или нормализация сигнала обеспечивается путем устранения смещения сигнала в области амплитуд  $I$  на постоянную величину и заключается в исключении симплексов тождественно равных единице.

Последовательное выполнение преобразований перехода к дополнению, сортировки и нормализации для некоторого исходного сигнала  $x(\uparrow)$  приводит к образованию его сигнала дополнения  $\bar{x}(\uparrow)$  специального вида с симплексами, упорядоченными по длине одинаковым образом с симплексами в представлении исходного сигнала, рис. 17.

Рассмотрим теперь случай нескольких сигналов. Совместная сортировка нескольких сигналов, поступающих по разным уровням квантования единой области амплитуд  $I$ , приводит к образованию сигнала сложения для этих сигналов. В частности, совместная сортировка сигнала  $x(\uparrow)$  и его дополнения специального вида  $\bar{x}(\uparrow)$  приводит к образованию сигнала тождественно равного единице в пределах размаха амплитуды этого сигнала.

Преобразования сравнения. Возможны также разнообразные сравнения сигналов, среди которых наиболее важными являются сравнения по отношению упорядоченности и отношению эквивалентности. Отношение эквивалентности для сигналов  $x$  и  $y$  вырабатывается по результату преобразования симплексов по логическому уравнению  $z = \overline{x \& y} \vee \bar{x} \& \bar{y}$  на всех уровнях квантования и реализуется ло-

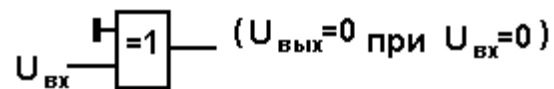


гической схемой "Исключительное ИЛИ".

При этом способе моделирования объекты выступают как представители класса, объединяющего множество эквивалентных объектов. Принадлежность объекта к некоторому классу зависит от наличия у рассматриваемого объекта признака, характеризующего этот класс.

Далее приведем систему признаков, использующую элементарные преобразования сигналов, и позволяющую на этой основе осуществлять локализацию объектов путем перехода от классов к подклассам объектов.

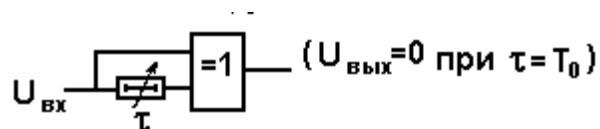
Признак присутствия сигнала на входе. Определять поступление сигнала на вход можно с помощью схемы "Исключительное ИЛИ" таким способом, как это показано на рис. 18.



**рис. 18. Обнаружение сигнала**

На один из входов схемы поступает сигнал тождественно равный нулю. Только при отсутствии входного сигнала сигнал на выходе схемы "Исключительное ИЛИ" тождественно равен нулю. При подаче входного сигнала на выходе схемы "Исключительное ИЛИ" устанавливается сигнал равный единице.

Признак периодичности. Оценка по этому признаку позволяет обнаруживать сигналы, у которых форма сигнала периодически повторяется. Для этого необходимо выполнить преобразование "Исключительное ИЛИ" между исследуемым сигналом и тем же самым задержанным сигналом на время  $\tau$ .



**рис. 19. Обнаружение признака периодичности**

При плавном увеличении значения  $\tau$  от нуля вверх и при  $\tau = T_0$

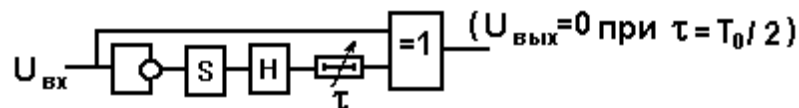
сигнал на выходе блока, реализующего функцию "Исключительное ИЛИ", становится равным нулю, что позволяет установить периодичность и зафиксировать класс исследуемого объекта, рис. 19.

Выделенный класс сигналов сам по себе весьма широк, поскольку объединяет любые мыслимые по форме и амплитуде сигналы с периодом  $T_0$ .

Признак симметрии. Этот признак связан с разделением класса периодических сигналов на подклассы симметричных и асимметричных сигналов, т.е. обеспечивает сужение исходного класса.

Под симметричными объектами здесь понимаются сигналы с одинаковой формой положительной и отрицательной полуволн (по терминологии классической теории моделирования, рассматривающей двухполярный сигнал, соответствующий поступающему однополярному сигналу).

Для обнаружения этого признака необходимо выполнить преобразование "Исключительное ИЛИ" между сигналом  $x(\uparrow)$  и его дополнением  $\bar{x}(\uparrow)$  специального вида, задержанным на величину  $\tau = \frac{T_0}{2}$ , как это показано на рис. 20.



**рис. 20. Обнаружение признака симметрии**

Дополнение специального вида формируется из исходного сигнала путём его инвертирования, сортировки S и нормализации Н.

Этим признаком обладают, например, симметричные по форме сигналы следующих классов: нулевой сигнал, меандр, гармонический сигнал, сигнал треугольной формы, сигнал подобный гармоническому сигналу, полуволны которого образованы полуокружностями и т.д.

Признак формы. Далее в классе периодических симметричных сигналов может быть проведена сортировка сигналов по признаку

формы. Выделение этого признака базируется на теореме о неподвижной точке.

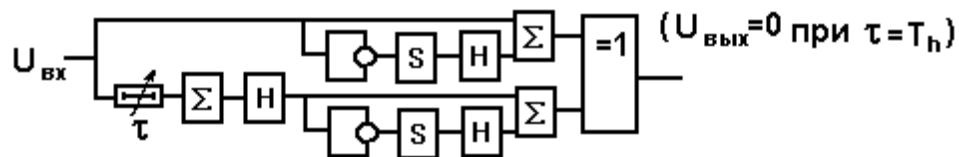
**Теорема 3.4.** При совместной сортировке сигнала и того же самого сигнала, задержанного на переменную величину  $\tau$  (сложении с самим собой), имеется такое значение  $\tau = T_h$ , при котором размах образованного сигнала равен размаху исходного сигнала.

**Доказательство.** При совместной сортировке с последующей нормализацией произвольного сигнала и второго такого же сигнала образуется объект с удвоенным размахом. Если этот сигнал симметричный, то при совместной сортировке такого сигнала и сигнала, сдвинутого на половину периода, с последующей нормализацией возникает сигнал тождественно равный нулю. Поэтому в силу непрерывности всегда найдется такое значение для величины сдвига, при котором полученный сигнал будет иметь тот же самый размах (оценка для величины сдвига проводится по наименьшей величине от положения нулевого смещения). Что и требовалось доказать. ♦

В общем случае совместная сортировка и нормализация сигнала и задержанного сигнала в неподвижной точке  $T_h$ , сопровождается трансформацией формы сигнала. Неподвижная точка важна потому, что позволяет рассматривать неограниченное число повторных преобразований. Во всех других случаях задержки повторные преобразования ведут либо к уменьшению, либо к увеличению размаха сигнала до предельных значений через ограниченное число повторных преобразований.

Разные по форме сигналы имеют разные величины для значений неподвижной точки. Для симметричных распространенных форм сигналов эти значения равны:  $\frac{1}{2}T_0$  - для меандра,  $\frac{1}{3}T_0$  - для гармонической формы,  $\frac{1}{4}T_0$  - для треугольной формы,  $\frac{\sqrt{3}}{4}T_0$  - для формы, образованной двумя полуокружностями вместо полуволн синусоиды.

Алгоритм обнаружения неподвижной точки показан на рис. 21.



**рис. 21. Обнаружение неподвижной точки**

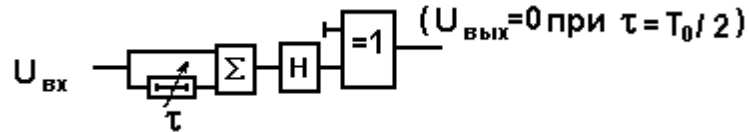
Основная часть алгоритма содержит блоки проведения сортировки с последующей нормализацией (сложением) для входного и задержанного входного сигналов. К ним добавлены блоки, преобразующие входной и задержанный входной сигналы в сигналы тождественно равные единице в пределах размаха сигнала. Это позволяет свести задачу обнаружения к определению отношения эквивалентности для двух уровней напряжения, одного для исходного и другого для преобразованного сигналов. Отношение эквивалентности фиксируется с помощью схемы "Исключительное ИЛИ".

Размах входного сигнала, вообще говоря, может быть любым, лишь бы он находился в пределах заданной области амплитуд.

Возвращаясь к задаче обнаружения признака формы, отметим, что собственно обнаружение заключается в определении значения неподвижной точки для исследуемого сигнала. Этот признак является последним в ряду признаков, обеспечивающих сужение класса объектов. Таким образом данная классификация содержит конечное число признаков и, следовательно, речь идет о разложении сигналов по конечному числу признаков, что является принципиальной особенностью времениподобного метода.

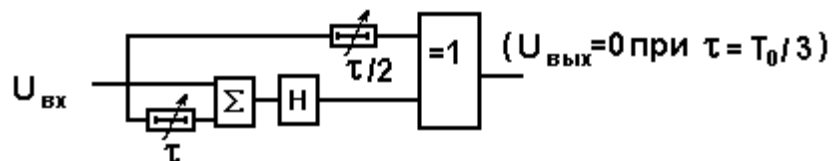
Среди множества форм сигналов можно указать две формы: меандр и гармоническую форму, которые занимают ключевое положение среди всех других форм сигналов. Прежде всего это выражается в том, что для каждого из них существуют упрощенные алгоритмы обнаружения, которые, кроме того, можно выполнить и за один шаг вычисления.

Для меандра алгоритм обнаружения показан на рис. 22.



**рис. 22. Обнаружение меандра**

В процессе преобразования меандр трансформируется в форму сигнала тождественно равному нулю. Для гармонической формы алгоритм обнаружения представлен на рис. 23.

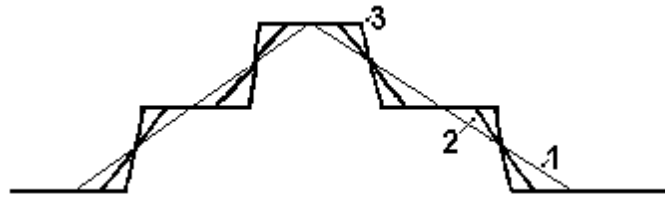


**рис. 23. Обнаружение гармонической формы**

Гармоническая форма это единственная форма, которая при обнаружении сохраняется без изменения. Гармоническая форма инвариантна ко всем линейным интервальным преобразованиям, она обладает свойством абсолютной стабильности формы.

Для всех других форм процесс обнаружения сопровождается трансформацией формы. При повторном выполнении процедуры обнаружения в общем случае возникает бесконечный ряд разнообразных форм. При этом в процессе трансформации могут возникнуть формы и с другими значениями неподвижной точки. Например, для треугольной формы последовательные значения неподвижной точки будут следующими:  $\frac{1}{4}T_0, \frac{3}{8}T_0, \frac{1}{4}T_0, \frac{7}{16}T_0, \frac{1}{4}T_0, \dots$ .

В этой последовательности формы, отвечающие одному и тому же значению неподвижной точки  $\frac{1}{4}T_0$ , показаны на рис. 24. На рисунке формы обозначены цифрами 1,2 и 3 в той последовательности, в которой они возникают при трансформации.



**рис. 24. Класс форм с неподвижной точкой  $\frac{1}{4} T_0$**

Несмотря на сужение класса сигналов по мере перехода от начального признака к следующему признаку, тем не менее и признак формы характеризует целый класс объектов. Поэтому в данном примере правильнее говорить не о треугольной форме, а о треугольноподобной форме сигнала.

Процесс обнаружения является процессом накопления, поэтому очевидно, что при его многократном повторении происходит сужение класса. Выражается это в увеличении крутизны фронтов, в постепенном приближении к форме, которая отвечает случаю квантованного сигнала.

Если же процесс обнаружения выполняется для квантованного сигнала, то для такого представителя класса процесс обнаружения является сходящимся. Он заканчивается преобразованием сначала в форму меандра, а затем в форму тождественно равную нулю. Число шагов при этом зависит от числа ступенек в квантованном сигнале и пропорционально этому числу.

Представление сигналов признаками в определенных случаях применения может оказаться эффективнее, чем с помощью членов степенного ряда. Связано это с тем, что действие признака распространяется на весь временной интервал одинаковым образом, в то время как ошибка представления конечным рядом с течением времени возрастает. В тоже время признак всегда характеризует не один объект, а класс объектов, содержащий в общем случае бесконечное число объектов.

Таким образом, в рамках времениподобного способа представле-

ния средства моделирования обеспечивают представление сигнала по системе конечного числа признаков. Это позволяет осуществить фильтрацию не путем измерения и преобразования спектра, а путем узнавания объекта, что является принципиальной особенностью способа.

## Глава 4. ВРЕМЕНИПОДОБНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

### 4.1. Задача времениподобного представления последовательностей импульсов

Рассмотрим практически важный и теоретически важный предельно упрощенный случай пространства  $\mathbf{W}$  и связанные с ним интервальные преобразования, который возникает тогда, когда используется только один уровень квантования. Части пространства  $I$  в этом случае не что иное, как всевозможные последовательности импульсов, отличающиеся друг от друга по частоте и скважности используемых импульсов. Области с огибающей в форме гармонической функции здесь соответствует меандр - последовательность областей в форме импульсов, в которой длина импульса равна длине интервала между импульсами.

В некотором смысле этот случай является случаем "чистого" времениподобного представления, так как изменений по амплитуде здесь вовсе не происходит, а в процессе преобразования меняется только длина интервала.

При этом все задачи приобретают определенную специфику, вызванную также тем, что размах сигнала по амплитуде равен размеру всего универсального множества  $I$ . Прежде всего это отражается на понятии дополнительной части упорядоченной одинаковым образом с основной частью. Так как переупорядочение симплексов здесь теряет смысл, то для произвольной части  $x$  имеет место равенство  $\bar{x}(\downarrow) = \bar{x}(\uparrow)$ . Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} x \vee \bar{x}(\downarrow) &= x \vee \bar{x}(\uparrow) = 1, \\ x \& \bar{x}(\downarrow) &= x \& \bar{x}(\uparrow) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$



Следовательно, можно считать, что инвертирование последовательности импульсов сразу приводит к образованию дополняющей ее до целого последовательности импульсов, упорядоченной одинаково с исходной последовательностью. Тем самым инвертирование меандра и с теоретической точки зрения во всех смыслах равносильно его задержке на половину периода этой последовательности.

Другая особенность связана с совокупностью ЭСФ (3.1). Так как все частные классы  $\psi_i(\Sigma, \xi)$  здесь тривиальны, кроме первого  $\psi_1(\Sigma, \xi) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_n$ , то, по существу, пространство  $\langle I, \vee, \& \rangle$  сокращается до пространства  $\langle I, \vee \rangle$ , использующего только одну логическую операцию (до полугруппы с единицей), в котором сложный сигнал образуется путем логического объединения по "ИЛИ" исходных последовательностей импульсов. Как обычно в случае решетки, здесь, естественно, возможно двойственное утверждение в виде пространства  $\langle I, \& \rangle$ .

Задачей фильтрации тем самым становится выделение определенного класса или, что тоже самое, выделение одной последовательности импульсов из последовательности, образованной логическим объединением периодических последовательностей из  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Чтобы этого достигнуть, надо воздействовать на объединенную последовательность так, чтобы ширина импульсов в мешающих последовательностях начала уменьшаться. Понятно, что вес выделяемой последовательности при этом будет увеличиваться. Будем называть такое преобразование преобразованием подобия  $P$ . Очевидно, что преобразование подобия можно записать как  $P = x_i \& x_i^*$ , где  $*$  обозначает задержку на время, равное периоду выделяемой последовательности. Очевидно также, что обужение может быть и таким, что ширина импульсов в каких то случаях будет уменьшаться до нуля.

## 4.2. Линейное пространство последовательностей импульсов и его модели

Ограничение размаха амплитуды единичным уровнем, которое имеет место для импульсных сигналов, приводит к самой простой формулировке задачи линейного преобразования (фильтрации): оператор  $P(x)$ , действующий из  $I$  в  $I$ , будет линейным, если для любых  $x_1$  и  $x_2$  выполняется

$$P(x_1 \vee x_2) = P(x_1) \vee P(x_2). \quad (4.2)$$

Второе условие линейного преобразования - условие однородности или действия на всю область значений амплитуды, при отсутствии изменения амплитуды, тривиально.

Таким образом, линейная интервальная система для импульсов это система, в которой обеспечивается преобразование, являющееся гомоморфизмом полугруппы с единицей в полугруппу с единицей.

Отметим, что теория гомоморфизмов полугрупп разработана только для их частных видов, что заставляет искать собственные пути и средства решения этой задачи [12].

Для этого сперва введем более универсальное для данного случая аналитическое описание последовательностей импульсов. Для удобства будем все время рассматривать пространство  $\langle I, \vee \rangle$ . Как выше было отмечено, частями такого пространства являются меандры, отличающиеся по величине периода, и которые могут быть заданы либо непосредственно, либо в виде дополнения.

Введем единое выражение для описания укорочения части  $x_i$  и ее дополнения  $\bar{x}_i$ . Это можно сделать с помощью функции равнозначности  $\lambda(x_i) = x_i \& x_i^* \vee \bar{x}_i \& \bar{x}_i^*$ , определяющей ширину импульсов части. Теперь часть  $\tilde{x}_i$  с произвольной шириной импульсов может быть записана в векторной форме как  $\tilde{x}_i = \lambda(x_i) \& x_i$ .

Функция равнозначности  $\lambda(x_i)$  выглядит как последовательность импульсов двойной частоты, рис. 25.



**рис. 25. Функция равнозначности  $\lambda$  для разных случаев величины задержки \*:** а) задержка равна нулю б) задержка равна  $T/4$  в) задержка равна  $T/2$

Один из пары импульсов функции равнозначности  $\lambda(x_i)$  характеризует обужение меандра  $x_i$ , а другой - меандра  $\bar{x}_i$ . Между различными по величине  $\lambda(x_i)$  можно выполнять логические операции. Функция равнозначности  $\lambda(x_i)$  может принимать любые значения в пределах от  $\lambda(x_i) = 1$  до  $\lambda(x_i) = 0$  и может рассматриваться как сигнал полного или частичного включения или отключения части  $x_i$  или части  $\bar{x}_i$ . Условно считается, что значения 1 и 0 являются значениями, соответственно, с максимальной и минимальной шириной импульса в последовательности импульсов двойной частоты.

В отличие от вещественного числа функция равнозначности  $\lambda(x_i)$  не столь универсальна. Для каждого  $x_i$  существует своя  $\lambda(x_i)$  как функция двойной частоты по отношению к данному конкретному  $x_i$ , в рамках которой она принимает одно из своих значений.

**Лемма 4.1.** Для преобразования подобия  $P$  справедливо следующее

$$P[\lambda(x_i) \& x_i] = x_i \& P[\lambda(x_i)].$$

**Доказательство.**  $P[\lambda(x_i) \& x_i] = [\lambda(x_i) \& x_i] \& [\lambda(x_i) \& x_i]^* = \lambda(x_i) \& x_i \&$

$\lambda^*(x_i) \& x_i^*$ . Поскольку  $x_i \& x_i^* = x_i \& \lambda(x_i)$ , то  $\lambda(x_i) \& x_i \& \lambda^*(x_i) \& x_i^* =$   
 $= x_i \& [\lambda(x_i) \& \lambda^*(x_i)] = x_i \& P[\lambda(x_i)]$ , что и требовалось доказать. ♦

Таким образом преобразование подобия оставляет без изменения собственно часть  $x_i$ , изменяется только показатель ширины ее импульсов  $\lambda(x_i)$ . Это еще раз показывает, что это преобразование действует исключительно в направлении длительности сигнала, ничего не затрагивая в направлении амплитуды.

Итак, каждая часть  $\tilde{X}_i$  принимает одно из значений из упорядоченного множества  $Q_i = \langle 1 \& x_i, \lambda_1(x_i) \& x_i, \dots, \lambda_n(x_i) \& x_i, 0 \rangle$ , в которое  $x_i$  может входить либо непосредственно, либо как  $\bar{x}_i$ . Все значения упорядоченного множества  $Q_i$  это объекты одинаковые по величине периода и в этом смысле множество  $Q_i$  является классом объектов.

Рассмотрим множество  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \dots, \tilde{X}_n$ . Это множество в такой записи элементов также линейно упорядоченно: чем больше  $n$  тем больше частота меандра  $x_n$  и тем больше  $\tilde{X}_n$ . Совместно с операцией логического объединения "ИЛИ" это множество образует полугруппу  $P$ , которая и является моделью линейного асимметричного пространства последовательностей импульсов  $\langle I, \vee \rangle$ .

Полугруппа  $P$  является линейно упорядоченной полугруппой, но не может быть полуструктурой, так как для частей  $\tilde{X}_i \vee \tilde{X}_k$  не определена верхняя грань.

Теория такого весьма общего математического объекта рассматривается в [16,17,18,19] и, как отмечается, не может считаться детально разработанной.

### 4.3. Свойства асимметричного линейного пространства последовательностей импульсов

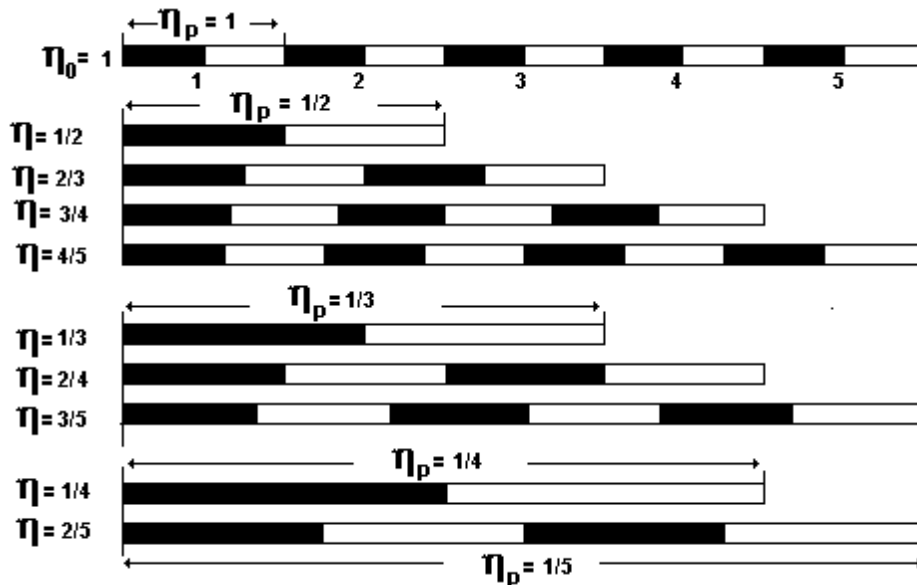
Основным инструментом теории являются разнообразные сопоставления, т.е. сравнения, которые дают возможность устанавливать отношения или связи между объектами модели в том или ином случае применения. Сравнение частей  $\tilde{X}_i$  полугруппы  $\mathbf{P}$  можно проводить непосредственно по значению их величины или точнее по их месту в порядке следования. Однако во многих случаях гораздо эффективнее оказывается сравнение частей по накопленному несоответствию, т.е. по разностной частоте между последовательностями меандров, отвечающих им.

Пусть задана последовательность импульсов с фиксированной частотой  $\nu_0$  и периодом  $T_0 = 1/\nu_0$ . У второй последовательности импульсов будем плавно изменять частоту  $\nu$  от нуля до бесконечности. Интервал одного периода разностной частоты  $\nu_p$  этих последовательностей определяется по минимальному расстоянию между моментами точного повторения взаимного начального положения импульсов двух последовательностей. Тем самым разностная частота выявляет не просто несоответствие этих двух временных процессов, а накопленное несоответствие, т.к. ее период как правило включает в себя несколько периодов каждого из пары сигналов.

Для определения отношений достаточно использовать не абсолютные  $\nu_0$ ,  $\nu$  и  $\nu_p$ , а относительные частоты:  $\eta_0 = \nu_0/\nu_0 = 1$ ,  $\eta = \nu/\nu_0$  и  $\eta_p = \nu_p/\nu_0$ .

Зависимость  $\eta_p$  от изменения  $\eta$  проще всего можно получить, если в качестве второй последовательности импульсов рассмотреть такие последовательности, в которых на интервале периода разностной частоты числа импульсов в двух последовательностях отличаются

друг от друга на ноль, один, два, три и т.д. На рис.26 приведены примеры второй последовательности импульсов с разными значениями частоты  $\eta$  для случая, когда  $\eta < 1$ , разбитые на группы.

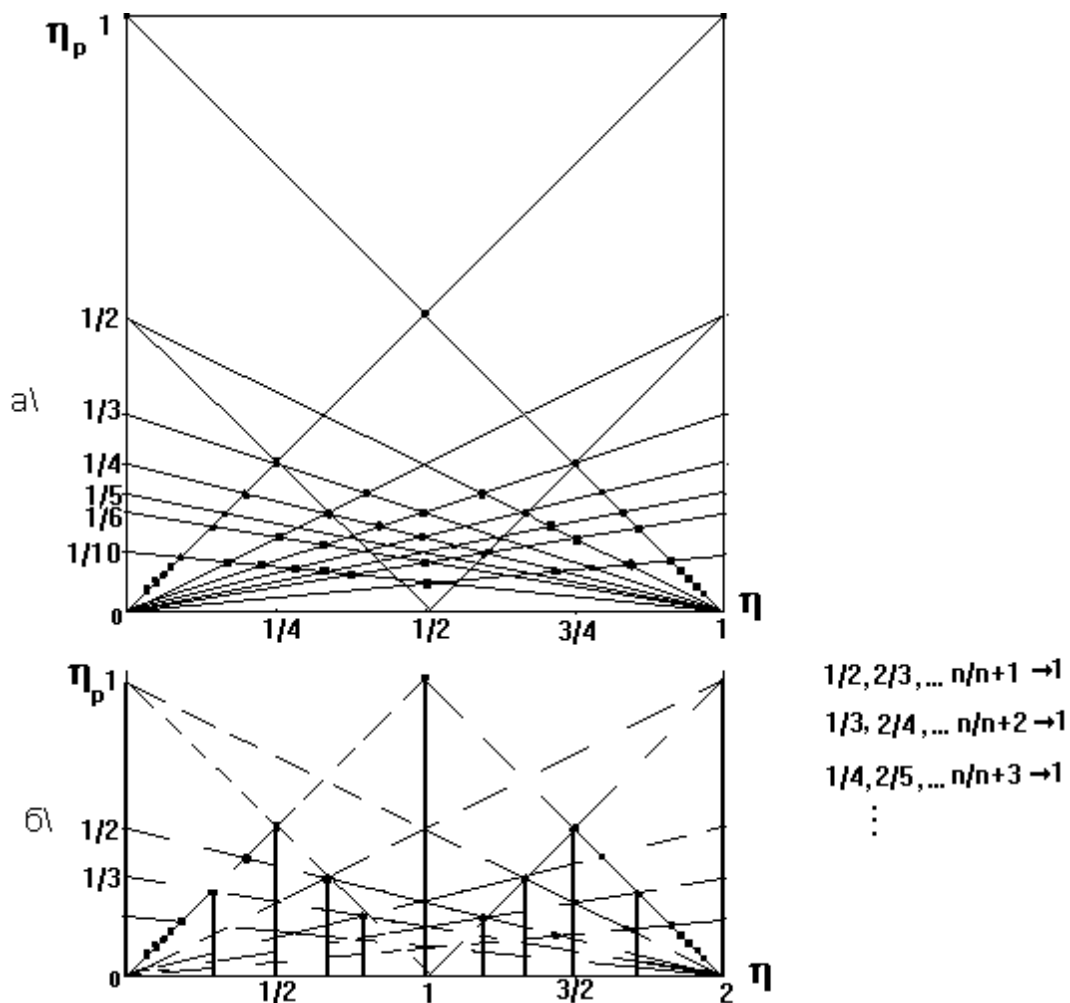


**рис. 26. Группы последовательностей импульсов, отличающиеся по числу импульсов на периоде разностной частоты от последовательности с частотой  $\eta_0$  на один, два и три импульса**

Возьмем, например, группу, в которой вторая последовательность импульсов имеет на интервале периода разностной частоты на один импульс меньше. Это последовательности импульсов с частотами  $\eta$  равными  $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots, \frac{n}{n+1}$  - закон целочисленных отношений. Соответствующими значениями для относительной разностной частоты  $\eta_p$  будут значения  $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, \frac{1}{n+1}$ . Эти значения располагаются на прямой, соединяющей на графике разностной частоты точки "1" на осях координат, рис. 27а.

Аналогичным образом для группы, в которой вторая последовательность имеет на интервале периода разностной частоты на два импуль-

са меньше, значениями частоты  $\eta$  будут  $1/3, 2/4, 3/5, \dots, n/n+2$ , а значениями разностной частоты  $\eta_p$  будут  $1/3, (1/4), 1/5, \dots, 1/n+2$ . Эти значения располагаются на прямой, соединяющей точку "1/2" на вертикальной оси координат и точку "1" на горизонтальной оси координат. Для записанного в скобках значения разностной частоты (1/4) на самом деле это значение равно 1/2 по предыдущему примеру, так как по определению разностная частота определяется по минимальному интервалу повторения взаимного начального положения импульсов. Это уточнение относится к случаям увеличения в одинаковое целое число раз числа импульсов в обеих последовательностях. При  $\eta = 1$  значение разностной частоты  $\eta_p = 1$ . Это значение располагается на



**рис. 27. График значений разностной частоты для двух последовательностей импульсов в виде: а) точек, б) отрезков**

вертикальной прямой, подходящей к точке "1" на горизонтальной оси координат. При  $\eta = 0$  значение разностной частоты также равно единице, причем это значение располагается на вертикальной прямой, подходящей к точке "0" на горизонтальной оси координат.

Во всех случаях последовательностей импульсов, отличающихся по числу импульсов на интервале периода разностной частоты на целое число импульсов от последовательности с частотой  $\eta_0$ , соответствуют точки значений разностной частоты, расположенные на пучке прямых, выходящих из точек  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n$  на вертикальной оси координат и сходящихся в точке "1" на горизонтальной оси координат. Эти точки можно получить и как результат пересечения с другим таким же пучком прямых, выходящих из начала координат и направленных к точкам  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n$  на вертикальной оси координат, проведенной из точки "1" на горизонтальной оси координат.

Все значения  $\eta$ , в которых была определена величина разностной частоты, являются точками разрыва. При ничтожно малом отклонении частоты  $\eta$  от рассмотренных выше значений разностная частота становится равной нулю. Эти значения разностной частоты соответствуют черному цвету на горизонтальной оси координат.

Особенно следует обратить внимание на разрывы в точках  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$ . Значения разностной частоты слева и справа от этих точек равны нулю и являются предельными значениями для последовательностей значений разностной частоты на пучках прямых, сходящихся к точкам ноль и единица на горизонтальной оси координат.

Тот же график разностной частоты можно получить, рассматривая разбиение с помощью диагональных линий квадрата "1×1". После первого разбиения надо перейти к двум квадратам "1/2×1/2", расположенным друг за другом на горизонтальной оси координат и построить для



них диагональные линии, и т.д. Поскольку каждому сочетанию двух последовательностей импульсов соответствует одно значение разностной частоты, то вместо точек можно использовать отрезки вертикальных прямых для изображения значений разностной частоты, тогда имеем рис. 27б.

И, наконец, оказывается, что не только начало отсчета, но и любое место на направлении времени может рассматриваться, как начало или источник пучка лучей, на которых размещены все те же самые точки модели.

При частоте  $\eta > 1$  во второй последовательности импульсов картина будет симметрично повторяться. Таким образом, например, для значений  $\eta = 2$ ,  $\eta = 3$ ,  $\eta = 4, \dots$  разностная частота одна и та же и равна разностной частоте при  $\eta = 1$ .

Проведенное выше сравнение множеств  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n$  как классов с помощью разностной частоты позволяет установить структуру пространства  $\langle I, \vee \rangle$ . Во-первых, вид графика разностной частоты показывает, что линейное пространство  $\langle I, \vee \rangle$  времениподобной модели является бесконечномерным пространством, содержащим несчетное число классов своих частей и, во-вторых, показывает, что каждая точка пространства  $\langle I, \vee \rangle$  является точкой разрыва. Тем самым линейное асимметричное пространство в целом отличается от векторного пространства пространственноподобной модели тем, что является неоднородным, и в этом заключается его главная особенность.

#### **4.4. Частный случай асимметричного линейного пространства последовательностей импульсов**

Пространство  $\langle I, \vee \rangle$  в полном объеме реализации предполагает существование бесконечных интервалов времени. В то же время на практике при применении последовательностей импульсов имеют дело только с конечными интервалами. Поэтому исключим из рассмотрения множества  $\mathcal{Q}_i$ , соответствующие точкам на горизонтальной оси

координат графика разностной частоты, сократив тем самым общее количество множеств до тех из них, которые отвечают точкам разрыва с отличной от нуля величиной разностной частоты. Очевидно, что таких множеств будет счетное число.

Последнее утверждение сводится на практике к следующему. Существует центральная или базовая последовательность импульсов с периодом  $T_0$ . Будем рассматривать последовательно интервалы  $1T_0$ ,  $2T_0$ ,  $3T_0$ , ...,  $rT_0$ . Для каждого из значений интервала  $rT_0$  можно рассматривать вторую последовательность импульсов с числом импульсов на этом интервале равным  $1, 2, 3, \dots, r, (r+1), (r+2), \dots$ . Часть последовательностей при этом окажется одинаковой с одной из ранее полученных последовательностей. Однако в целом здесь будут присутствовать все последовательности в соответствии с графиком разностной частоты. Относительная разностная частота  $\eta_p$  при этом будет принимать значения из конечной последовательности значений  $\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ .

Представляет интерес еще более простой случай, когда для центральной или базовой последовательности импульсов с периодом  $T_0$  задается некоторое фиксированное число  $m$  импульсов этой последовательности и рассматриваются всевозможные вторые последовательности импульсов с числом импульсов  $1, 2, 3, \dots, n$  на интервале  $mT_0$ . При этом, как правило, оказывается использованной только часть значений разностной частоты из конечной последовательности ее возможных значений  $\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ .

Такая пара последовательностей импульсов на интервале  $mT_0$  характеризуется двумя величинами: соотношением  $(n, m)$  чисел импульсов на этом интервале и величиной взаимной разностной частоты. Обычно соотношение  $(n, m)$  называют просто отношением и записывают либо как  $n \setminus m$ , либо как  $n:m$  с соблюдением правила: справа записы-

вается число  $m$  для базовой последовательности.

По этим двум величинам можно провести сравнение между собой всех пар. В процессе такого сравнения, вообще говоря, проводится оценка близости множеств  $Q_i$  друг к другу в условиях множества  $Q_m$ . Эта оценка приводит к обнаружению эквивалентных множеств  $Q_i$  или к разбиению множеств  $Q_i$  определенным образом на классы по критерию множества  $Q_m$ .

Как ниже будет видно, анализ по этим двум способам сравнения обеспечивает разбиение множеств  $Q_i$  на классы не одинаковым образом. Отметим также, что сопоставление по соотношению целых чисел импульсов  $(n, m)$  по своему смыслу не что иное, как сравнение этих чисел по критерию абсолютно наименьшей системы вычетов  $p$  по модулю  $m$ .

Таблица 4.1

знач. инт-ла $m$	сравнение по разностной частоте		сравнение по абсолютно наименьшей системе вычетов																														
	график разностной частоты	разбиение на классы																															
1	2	3	4																														
1		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_p</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0, 1 ...</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_p$	множества	1	1	0, 1 ...							<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0, 1 ...</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0	0, 1 ...												
S	$\eta_p$	множества																															
1	1	0, 1 ...																															
S	P	множества																															
1	0	0, 1 ...																															
2		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_p</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0, 2 ...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_p$	множества	1	1	0, 2 ...	2	1/2	1							<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0, 2 ...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0	0, 2 ...	2	$\pm 1$	1						
S	$\eta_p$	множества																															
1	1	0, 2 ...																															
2	1/2	1																															
S	P	множества																															
1	0	0, 2 ...																															
2	$\pm 1$	1																															
3		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_p</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0, 3 ...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/3</td> <td>1, 2</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_p$	множества	1	1	0, 3 ...	2	1/3	1, 2							<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0, 3 ...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1, 2</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0	0, 3 ...	2	$\pm 1$	1, 2						
S	$\eta_p$	множества																															
1	1	0, 3 ...																															
2	1/3	1, 2																															
S	P	множества																															
1	0	0, 3 ...																															
2	$\pm 1$	1, 2																															
4		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_p</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0, 4</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/4</td> <td>1, 3, 5 ...</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1/2</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_p$	множества	1	1	0, 4	2	1/4	1, 3, 5 ...	3	1/2	2				<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0, 4</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1, 3, 5 ...</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\pm 2</math></td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0	0, 4	2	$\pm 1$	1, 3, 5 ...	3	$\pm 2$	2			
S	$\eta_p$	множества																															
1	1	0, 4																															
2	1/4	1, 3, 5 ...																															
3	1/2	2																															
S	P	множества																															
1	0	0, 4																															
2	$\pm 1$	1, 3, 5 ...																															
3	$\pm 2$	2																															

Примечание: В таблице 4.1 индекс S читать как  $K_s$ . Т.е. нужно S заменить на  $K_s$ .

Так как график разностной частоты является по своему характеру

периодическим, то сравнение по целым числам импульсов  $n$  и  $m$  и по разностной частоте на интервале  $mT_0$  достаточно выполнить для значений  $n = 1, 2, 3, \dots (m - 1)$ . Результаты сравнения множеств  $Q_i$  в виде разбиения на классы приведены в таблице 4.1 для  $m = 1 \div 9$ .

Сопоставление полученных результатов показывает, что при малых  $m = 1, 2, 3, 4$  и  $6$  оба способа сравнения обеспечивают одинаковое разбиение на классы множеств  $Q_i$  последовательностей импульсов, но в случае  $m = 5, 7$  и далее разбиения не совпадают.

Способ классификации путем сравнения по абсолютно наименьшей системе вычетов оказывается здесь более точным, так как обеспечивает более мелкую, детальную классификацию, которая не противоречит классификации по разностной частоте. В связи с этим этот способ следует считать основным.

(Таблица 4.1, продолжение)

1	2	3	4																																	
5		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_D</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0 5...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/5</td> <td>1, 2, 3, 4</td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_D$	множества	1	1	0 5...	2	1/5	1, 2, 3, 4	<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0 0</td> <td>5...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1 4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\pm 2</math></td> <td>2, 3</td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0 0	5...	2	$\pm 1$	1 4	3	$\pm 2$	2, 3												
S	$\eta_D$	множества																																		
1	1	0 5...																																		
2	1/5	1, 2, 3, 4																																		
S	P	множества																																		
1	0 0	5...																																		
2	$\pm 1$	1 4																																		
3	$\pm 2$	2, 3																																		
6		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_D</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0 6...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/6</td> <td>1 5</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1/3</td> <td>2 4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1/2</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_D$	множества	1	1	0 6...	2	1/6	1 5	3	1/3	2 4	4	1/2	3	<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0 0</td> <td>6...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1 5</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\pm 2</math></td> <td>2 4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>\pm 3</math></td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0 0	6...	2	$\pm 1$	1 5	3	$\pm 2$	2 4	4	$\pm 3$	3			
S	$\eta_D$	множества																																		
1	1	0 6...																																		
2	1/6	1 5																																		
3	1/3	2 4																																		
4	1/2	3																																		
S	P	множества																																		
1	0 0	6...																																		
2	$\pm 1$	1 5																																		
3	$\pm 2$	2 4																																		
4	$\pm 3$	3																																		
7		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_D</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0 7...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/7</td> <td>1, 2, 3, 4, 5, 6</td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_D$	множества	1	1	0 7...	2	1/7	1, 2, 3, 4, 5, 6	<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0 0</td> <td>7...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1 6</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\pm 2</math></td> <td>2 5</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>\pm 3</math></td> <td>3, 4</td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0 0	7...	2	$\pm 1$	1 6	3	$\pm 2$	2 5	4	$\pm 3$	3, 4									
S	$\eta_D$	множества																																		
1	1	0 7...																																		
2	1/7	1, 2, 3, 4, 5, 6																																		
S	P	множества																																		
1	0 0	7...																																		
2	$\pm 1$	1 6																																		
3	$\pm 2$	2 5																																		
4	$\pm 3$	3, 4																																		
8		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_D</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0 8...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/8</td> <td>1 3 5 7</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1/4</td> <td>2 6</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1/2</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_D$	множества	1	1	0 8...	2	1/8	1 3 5 7	3	1/4	2 6	4	1/2	4	<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0 0</td> <td>8...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1 7</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\pm 2</math></td> <td>2 6</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>\pm 3</math></td> <td>3 5</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td><math>\pm 4</math></td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0 0	8...	2	$\pm 1$	1 7	3	$\pm 2$	2 6	4	$\pm 3$	3 5	5	$\pm 4$	4
S	$\eta_D$	множества																																		
1	1	0 8...																																		
2	1/8	1 3 5 7																																		
3	1/4	2 6																																		
4	1/2	4																																		
S	P	множества																																		
1	0 0	8...																																		
2	$\pm 1$	1 7																																		
3	$\pm 2$	2 6																																		
4	$\pm 3$	3 5																																		
5	$\pm 4$	4																																		
9		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th><math>\eta_D</math></th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0 9</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1/9</td> <td>1, 2 4, 5 7, 8</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1/3</td> <td>3 6</td> </tr> </tbody> </table>	S	$\eta_D$	множества	1	1	0 9	2	1/9	1, 2 4, 5 7, 8	3	1/3	3 6	<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>P</th> <th>множества</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0 0</td> <td>9...</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\pm 1</math></td> <td>1 8</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\pm 2</math></td> <td>2 7</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>\pm 3</math></td> <td>3 6</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td><math>\pm 4</math></td> <td>4, 5</td> </tr> </tbody> </table>	S	P	множества	1	0 0	9...	2	$\pm 1$	1 8	3	$\pm 2$	2 7	4	$\pm 3$	3 6	5	$\pm 4$	4, 5			
S	$\eta_D$	множества																																		
1	1	0 9																																		
2	1/9	1, 2 4, 5 7, 8																																		
3	1/3	3 6																																		
S	P	множества																																		
1	0 0	9...																																		
2	$\pm 1$	1 8																																		
3	$\pm 2$	2 7																																		
4	$\pm 3$	3 6																																		
5	$\pm 4$	4, 5																																		

Число классов  $K_s$  по основному способу классификации при раз-

ных  $m$  равно

$$K_s = \frac{m+2}{2}, \text{ для четных } m$$

$$K_s = \frac{m+1}{2}, \text{ для нечетных } m. \quad (4.3)$$

В связи с разбиением на классы введем еще один индекс в обозначении множества. Будем теперь использовать два индекса, первый индекс - номер класса по сопоставительной классификации, второй индекс - число импульсов в последовательности импульсов на интервале  $mT_0$ . Если сравнение выполнено по разностной частоте, то будем отмечать это штрихом рядом с обозначением множества. Например, класс центральной последовательности с  $m = 5$  запишется как  $Q'_{15}$ .

При сравнении по разностной частоте имеем здесь следующее разбиение: для класса номер один - множества  $Q'_{10}, Q'_{15}, \dots$ , для класса номер два - множества  $Q'_{21}, Q'_{22}, Q'_{23}, Q'_{24}, \dots$ . При сравнении по абсолютно наименьшей системе вычетов имеем в классе номер один - множества  $Q_{10}, Q_{15}, \dots$ , в классе номер два - множества  $Q_{21}, Q_{24}, \dots$ , в классе номер три - множества  $Q_{32}, Q_{33}, \dots$ . Принадлежность разных множеств к одному классу связывает их отношением эквивалентности в смысле выбранного критерия разбиения на классы.

Рассмотрим вопрос о максимально возможном числе неэквивалентных попарно множеств последовательностей импульсов.

**Теорема 4.1.** Последовательности импульсов с числом импульсов 4,6,7 (точно также тройка последовательностей импульсов с числом импульсов 5,6,8, тройка последовательностей импульсов с числом импульсов 6,8,9) попарно неэквивалентны между собой, если модулем является одно из них.

**Доказательство.** Утверждение теоремы доказывается путем перебора. Для этого рассмотрим классификацию по основному способу,

приведенную в таблице 4.1. Присваивая  $m$  поочередно какое-либо значение из тройки значений, убеждаемся, что два других значения всегда попадают в классы с разными номерами, что и доказывает утверждение теоремы. ♦

#### 4.5. Преобразования и их свойства

Рассмотрим преобразования пространства последовательностей импульсов. Единичным преобразованием  $\mathfrak{I}$  является преобразование, которое каждой части  $z \in \mathcal{Q}_{ij}$  ставит в соответствие саму часть  $z$ . Это преобразование будет линейным, так как по условию  $\mathfrak{I}(z) = z$ , и если  $z = x \vee y$ , то  $\mathfrak{I}(x \vee y) = x \vee y = \mathfrak{I}(x) \vee \mathfrak{I}(y)$ , следовательно  $\mathfrak{I}$  -гомоморфизм.

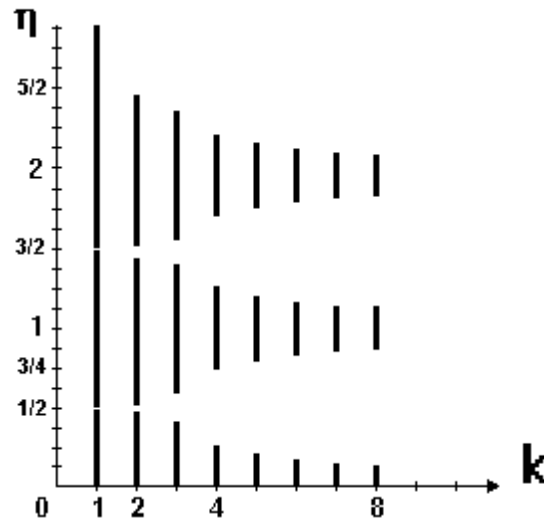
Преобразованием, обеспечивающим фильтрацию, является преобразование подобия  $P$ . Система, реализующая преобразование подобия, содержит элемент совпадения "И", на один вход которого последовательность импульсов входного сигнала поступает непосредственно, а на другой вход - через элемент задержки. Преобразование подобия является преобразованием логического дифференцирования.

Аналогичным образом для пространства  $\langle I, \& \rangle$  преобразование подобия, удлиняющее каждый элемент, выполняется интервальной системой для импульсов, в которой вместо элемента совпадения "И" используется элемент объединения "ИЛИ". Такое преобразование будем называть преобразованием логического интегрирования.

При последовательном соединении  $k$  одинаковых схем дифференцирования в цепочку возникает преобразование, которое обозначим как  $P^k$ .

Пусть задана такая цепочка, использующая  $k$  одинаковых схем дифференцирования с линиями задержки на время равное  $T_0$ . Определим частотные свойства такой цепочки. Для этого рассмотрим прохождение последовательности импульсов типа меандр с произвольной частотой  $\eta$  через такую цепочку.

Поскольку последовательность импульсов с частотой  $\eta_0$  проходит на выход цепочки без искажения, то частота  $\eta_0$  является центральной



**рис. 28. График значений частоты последовательностей импульсов, проходящих на выход цепочки ИФИ**

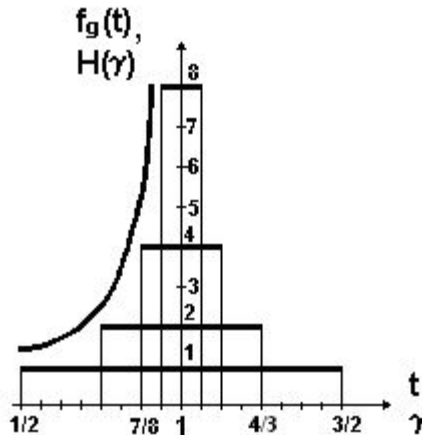
частотой. Результаты преобразования последовательности импульсов с произвольной частотой с помощью цепочки схем дифференцирования определяются по временным диаграммам. Из них следует, что последовательность импульсов, в зависимости от значения частоты, либо остается без изменения, либо преобразуется в последовательность с импульсами в обуженном виде, либо длина импульсов в последовательности уменьшается до нуля.

Наиболее удобно оценивать частотные свойства цепочки, обеспечивающей преобразование  $P^k$ , с помощью сопутствующего ему гомоморфизма пространства импульсов в двухэлементное множество ноль и единица.

Будем зачернять для каждого значения  $k$  такие значения частот для последовательности импульсов, которые после преобразования

содержат импульсы с длиной, отличной от нуля. В результате имеем график, показанный на рис. 28 (спектральные линии).

Он состоит из периодически повторяющихся в вертикальном направлении одинаковых наборов вертикальных отрезков прямых, и по характеру периодичности соответствует графику на рис. 27 и классификации множеств по основному способу.



**рис. 29. Частотные характеристики цепочки ИФИ и идеальной колебательной системы**

Для области  $1/2 < \eta < 1$  граничное значение частоты последовательности импульсов, для которой длина импульсов уменьшается до нуля, определяется по формуле  $\eta = 2^{k-1}/2^k$ . Последовательности импульсов с граничными и меньшими частотами на выход цепочки схем дифференцирования не проходят. Граничными значениями  $\eta$  для значений  $k$  равных  $1, 2, 3, \dots$  будут  $1/2, 3/4, 5/6, \dots$ .

Ядро преобразования  $P^k$  содержит частоты  $\ker P^k = (1/2 \div 2^{k-1}/2^k)$ . Все последовательности импульсов, попадающие в эту область частот, при преобразовании  $P^k$  переходят в нейтральный элемент преобразования - ноль.

Для того чтобы установить характер изменения граничного значения частоты  $\eta$  с ростом  $k$ , используем эти граничные значения частоты



ты в качестве аргументов и построим обратный график зависимости числа  $k$  от граничного значения относительной частоты  $\eta$ . Этот график показан на рис. 29.

График для области частот  $1 < \eta < 3/2$  получается путем симметричного повторения графика для области  $1/2 < \eta < 1$ . График для объединенной области частот  $1/2 < \eta < 3/2$  можно интерпретировать как ступенчатую функцию, стремящуюся асимптотически к бесконечности у вертикальной прямой в точке "1".

Выведем уравнение для описания этой ступенчатой функции. Высота этой ступенчатой функции равна  $k$ , а половина ширины равна  $1 - 2k - 1/2k = 1/2k$ . Вместо переменной  $\eta$  будем использовать переменную  $t = (\eta - 1)$ , тогда уравнение для ступенчатой функции можно записать как

$$\begin{aligned} f_g(t) &= k, & \text{при } -1/2k \leq t \leq 1/2k \\ f_g(t) &= 0, & \text{при } |t| > 1/2k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Очевидно, что площадь  $\Pi$  под  $f_g(t)$  равна  $\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) dt = \int_{-1/2k}^{1/2k} k dt = 1$ . Пусть теперь ширина функции  $f_g(t)$  уменьшается, при этом высота ее растет, что сохраняет единичную площадь. Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим дельта функцию

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_g(t) = \infty, \text{ при } t = 0$$

$$\delta(t) = 0, \text{ при } t \neq 0.$$

На этом же рисунке изобразим график зависимости модуля коэффициента передачи  $H(\gamma)$  от относительной частоты  $\gamma = \omega/\omega_p$  для идеального классического колебательного контура.

Модуль коэффициента передачи  $H$  колебательного контура выражает отношение амплитуды, снимаемой с обкладок конденсатора, к

амплитуде внешнего напряжения частоты  $\omega$  и записывается в виде

$$H = \left| \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \frac{1}{Q}}} \right|, \quad (4.5)$$

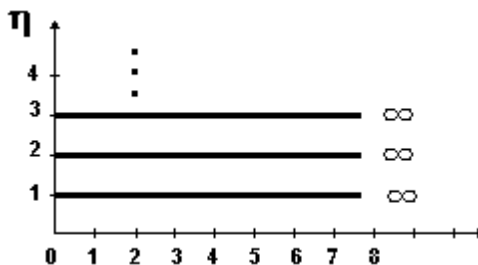
где  $Q = \sqrt{L/C}R^2$  - величина добротности контура,  $\omega_p = \sqrt{1/LC}$  - резонансная частота контура [20].

Для идеального колебательного контура без потерь ( $R \rightarrow 0$ ) модуль коэффициента передачи будет равен

$$H(\gamma) = \left| \frac{1}{1 - \gamma^2} \right|. \quad (4.6)$$

Сравнение этих графиков показывает, что они описывают сходные по характеру процессы. С физической точки зрения, в резонансном фильтре реактивные элементы накапливают энергию и отдают ее в паузах входного сигнала. Теоретически при включении или выключении сигнала эти процессы длятся бесконечно долго. В цепочке схем дифференцирования, в некотором смысле аналогично, осуществляется задержка, а, затем, - в паузах входного сигнала, - подстановка импульсов, однако то и другое - конечные по длительности процессы.

Можно считать, что значения дискретной функции  $f_g(t)$  получаются путем округления до ближайшего целого значений модуля коэффици-



**рис. 30. Характеристика пропускания цепочки ИФИ при  $k \rightarrow \infty$**

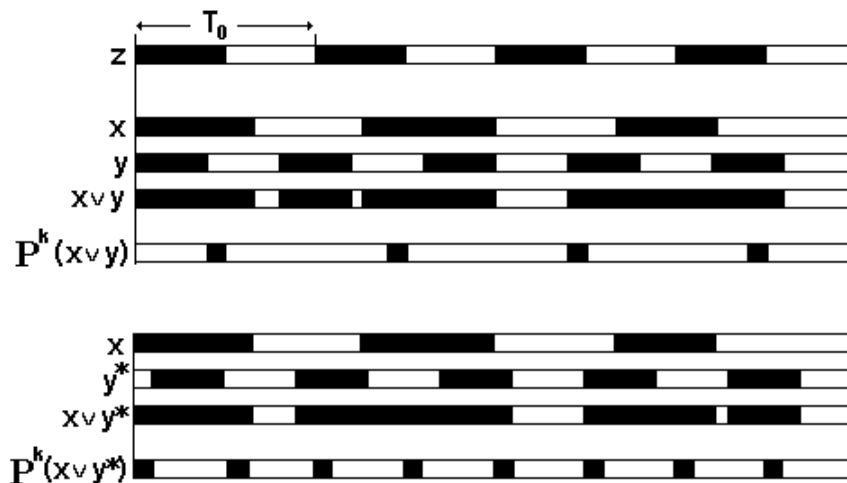
ента передачи для колебательного контура в тех же точках. С одной стороны это можно рассматривать как существование аналогии этих

двух процессов, а, с другой стороны, это расхождение является принципиальным: случаи равенства нулю функции соответствуют необратимым преобразованиям, которые никогда не имеют место для колебательной системы.

Что касается вида предельной характеристики пропускания для цепочки интервальных схем для импульсов, содержащей бесконечное число каскадов, то она представляет собой периодически повторяющиеся горизонтально расположенные дельта импульсы, отстоящие друг от друга на одинаковое расстояние, рис. 30.

Характеристика пропускания для цепочки интервальных схем тесно связана с классификацией множеств, они взаимно дополняют друг друга. Рассмотрим, например, граничные значения частот при разных  $k$ , которые не проходят на выход системы. Поскольку здесь  $\eta = 2^{k-1}/2^k$ , то из этого также следует, что  $n/m = 2^{k-1}/2^k$  и, следовательно,  $k = m/2(m-n)$  для целых или ближайших целых значений.

Перейдем к случаю логической комбинации из нескольких последовательностей импульсов на входе цепочки схем дифференцирования. Рассмотрим сперва логическую комбинацию из двух последова-



**рис. 31. Преобразование с помощью цепочки ИФИ с линиями задержки на  $T_0$  последовательности импульсов  $x \vee y$  при разных соотношениях по фазе между  $x$  и  $y$**

тельностью импульсов.

**Теорема 4.2.** Если составная часть  $z = x \vee y$  образована из двух частей  $x \in \mathcal{Q}_{1j}$ ,  $y \in \mathcal{Q}_{ik}$  и  $i \neq 1$ , принадлежащих двум множествам разных классов, один из которых является классом номер один, то преобразование подобия - гомоморфизм.

**Доказательство.** Пусть на вход схемы дифференцирования поступает составная часть  $z = x \vee y$ . Преобразование подобия обеспечивает здесь следующее:  $P(x) = x$  и  $P(y) = \lambda(y) \& y$ , тогда имеем  $P(x \vee y) = (x \vee y) \& (x \vee y)^* = x \vee y \& y^* = x \vee \lambda(y) \& y$ . Следовательно  $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ , что и доказывает утверждение. ♦

Из теоремы 4.2 следует, что, настраивая цепочку схем дифференцирования на каждую из двух последовательностей, входящих в состав составной части, можно обеспечивать их полное разделение.

Линейное преобразование осуществляется здесь путем уменьшения длины интервала на определенную величину (для двойственной системы будет иметь место увеличение длины интервала импульсов на определенную величину). Это принципиально отличает интервальные системы от классических систем, обеспечивающих линейные преобразования путем растяжения или сжатия в некоторое число раз.

Если же два разных множества  $\mathcal{Q}_{ij}$  и  $\mathcal{Q}_{ik}$  принадлежат к одному классу такому, что  $i \neq 1$ , то последовательность импульсов  $x \vee y$  после повторного многократного дифференцирования преобразуется в последовательность  $\lambda(z) \& z$ , где  $z \in \mathcal{Q}_{1t}$ , отсутствующую в исходной комбинации. Этот пример показан на рис. 31 для двух случаев разного сочетания фаз последовательностей импульсов  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим логическую комбинацию из трех последовательностей импульсов. Здесь практический интерес представляют случаи, предусмотренные теоремой 4.1. Эти последовательности можно вы-

делять из их логической комбинации без взаимных помех.

Однако преобразование подобия  $P^k$  в случаях, предусмотренных теоремой 4.1, не является гомоморфизмом. Пусть  $x, y, z$  одна из троек частей, предусмотренных теоремой 4.1, тогда имеем  $P(z) = z$ ,  $P(x) = \lambda(x) \& x$ ,  $P(y) = \lambda(y) \& y$ . Преобразование подобия обеспечивает  $P(z \vee x \vee y) = (z \vee x \vee y) \& (z \vee x \vee y)^* = z \vee \lambda(x) \& x \vee \lambda(y) \& y \vee [(x \& y^*) \vee (x^* \& y)]$ . Отсюда следует, что  $P(z \vee x \vee y) \neq P(z) \vee P(x) \vee P(y)$ .

**Теорема 4.3.** Логическое объединение последовательностей импульсов с числами импульсов  $1, 2, 3, \dots, m$ , если они являются меандрами, тривиально при  $m > 4$ .

**Доказательство.** Пусть  $m = 4$ . Возьмем интервал  $4T_0$  равный периоду самой низкой возможной разностной частоты при данном  $m$ . Его длина будет  $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ , выраженная в относительных единицах. Тогда длительность импульсов в последовательностях  $1, 2, 3, 4$  будет соответственно равна  $12, 6, 4, 3$ . Разместим эти последовательности во времени так, чтобы их импульсы следовали строго один за другим, тогда их общая длина будет равна  $12+6+4+3 > 24$  и, следовательно, их объединение по "ИЛИ" тождественно равно единице, что исключает возможность преобразования. Что и требовалось доказать. ♦

Эта теорема устанавливает верхнюю границу для числа последовательностей импульсов в логическом объединении.

Таким образом получено, что базовое преобразование фильтрации, - преобразование подобия, - обеспечивает фильтрацию для входного сигнала, представляющего собой комбинацию ограниченного числа последовательностей импульсов. При увеличении числа последовательностей импульсов свыше двух линейное свойство преобразования, - принцип суперпозиции, - начинает постепенно нарушаться.

Цепочка, образованная последовательным соединением схем дифференцирования (ИФИ), является базовой интервальной системой для последовательностей импульсов в классе цифровых систем. Она

является цифровым аналогом классического колебательного контура.

При переходе к идеальному случаю обе системы в некотором смысле также оказываются сходными: в интервальной системе, содержащей бесконечное число каскадов, задержка начала формирования выходного сигнала становится бесконечной, в классической резонансной системе без потерь бесконечно долго длится переходный процесс, также приводящий к бесконечной задержке начала формирования выходного сигнала.

В качестве общего итога можно отметить, что теория времениподобного представления включает в себя, таким образом, две части: более общую первую часть, рассматривающую сигналы с произвольной величиной амплитуды и вторую часть, обеспечивающую моделирование последовательностей импульсов, т.е. сигналов с фиксированной амплитудой. Базовые математические средства моделирования для второй части, безусловно, более контрастно раскрывают свойства подхода.

## Глава 5. ВРЕМЕНИПОДОБНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВАКУУМА

### 5.1. Модели базовых устройств в двух системах представления

Ранее было установлено, что переход ко второй форме представления это переход от пространственноподобного к времениподобному представлению, от линейного преобразования путем растяжения и сжатия к линейному преобразованию путем приращения и убавления длины, от системы моделей мира Аристотеля-Галилея-Ньютона к системе моделей мира Эйнштейна-Минковского, от независимых между собой и первичных компонент сущности, - компонент времени и пространства, - к относительным, связанным между собой компонентам времени и пространства, вторичным по отношению к сущности, от дискретного к непрерывному, от количественного к качественному. Было показано, что этот переход сопровождается поворотом на девяносто градусов для функций закономерностей, характеризующих основные особенности способа (линейные преобразования) и заменой непрерывных функций на ступенчатые. В результате этого между двумя способами сохраняется сходство и прослеживается аналогия.

В окончательном виде система моделей для двух определяющих систем фильтрации, резонансного контура и накопителя выглядит следующим образом.

Пространственноподобный способ представления. Резонансный контур как непрерывная система определяется уравнениями

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = f(t)$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_R(t) \quad ,$$

Ему отвечает в классе импульсных систем рекурсивный фильтр первого порядка, использующий сумматор - вычитатель. Здесь имеем  $U_{\text{ВЫХ}}(n T_d) = \{\alpha f(T_d) + \beta f[(n-1) T_d]\} + \{\gamma U_{\text{ВЫХ}}[(n-1) T_d]\}$ .

Величина  $T_d$  зависит только от спектра входного сигнала и определяется по теореме отсчетов.

Накопитель как непрерывная система это устройство, обеспечивающее

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = f(t) + f(t + T_{\text{ЛЗ}}).$$

Он реализуется с использованием сумматора - вычитателя, работающего при непрерывном поступлении входного сигнала. Это может быть, например, сумматор - вычитатель на базе усилителя постоянного тока, который теоретически должен обладать бесконечным по величине коэффициентом усиления.

В классе импульсных систем ему соответствует нерекурсивный фильтр первого порядка на базе цифрового сумматора - вычитателя

$$U_{\text{ВЫХ}}(nT_{\text{ЛЗ}}) = f(nT_{\text{ЛЗ}}) + f[(n-1)T_{\text{ЛЗ}}].$$

Полунакопитель на базе сумматора самостоятельных аналитических средств описания работы при пространственноподобном способе представления не имеет.

Времениподобный способ представления. При рассмотрении входных сигналов как частей асимметричного линейного пространства резонансный контур как аналоговая система определяется уравнениями

$$L \frac{du}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int u dt = h$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = Ru.$$

Здесь  $u$  и  $h$  - обозначения, невыразимые в виде функции. Такое аналитическое описание из-за невозможности применения функций неэффективно.

В классе цифровых систем резонансному контуру соответствует цепочка, образованная последовательным соединением интервальных накапливающих фильтров для импульсов (ИФИ), описываемая уравнением

$$U_{\text{ВЫХ}} = [(x \& x^*) \& (x \& x^*)^*] \& [(x \& x^*) \& (x \& x^*)^*]^* \& \dots$$



Накопитель на базе сумматора - вычитателя самостоятельных аналитических средств описания работы здесь не имеет. Полунакопитель или накопитель на базе сумматора (ИФН) как аналоговая система определяется уравнением (для случая соединенных последовательно ИФН)

$$(x+x^*)+(x+x^*)^*+[(x+x^*)+(x+x^*)]^*+...=\sum_{i=1}^k C_k^i x^{*i}.$$

И, наконец, той же цепочке ИФН в классе цифровых систем соответствует система интервального накапливающего фильтра для квантованной области амплитуд (ИФК), определяемая уравнением

$$\omega(\Sigma) = 1 \# \psi_1(\Sigma, \xi) \# \psi_2(\Sigma, \xi) \# \psi_3(\Sigma, \xi) \# \dots \# \psi_n(\Sigma, \xi) \# 0,$$

$$\text{где } \psi_i(\Sigma, \xi) = \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_n^i (x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots).$$

## 5.2. Живопись как единство двух систем представления

Окружающий мир для художника подобен лаборатории, а его эксперименты в нем это завершенные живописные полотна. Сегодня трудно сказать, что древнее - искусство живописи или искусство математики и логики. Во всяком случае, и то и другое за последнее столетие претерпели значительное развитие. При этом, несомненно, одно - развитие живописи шло через осмысление самых глубинных основ мира, и можно без преувеличения сказать, что на этом пути живописцы совершили серьезные открытия.

Особенностью математики и логики является то, что в них принята аксиоматическая форма мышления. Фиксация результата обеспечивается в виде различных формализованных выражений математики и логики. В живописи мышление протекает на интуитивно-чувственном уровне, которое можно выразить с помощью языковых понятий. Результатом живописного мышления является определенный вид изображения. Удивительно то, что, несмотря на это казалось бы принципиальное различие, развитие и углубление познания в живописи и ма-

тематике, логике идет одним и тем же путем. Чтобы раскрыть этот тезис обратимся к истории живописи.

На протяжении с самых древних времен и затем в периоды античности, средневековья, Нового времени художники осваивали реальность. Еще в средние века была установлена система искусства, основанная на чувстве пространственной бездонности и временной бесконечности мира. При этом искусство сосредоточилось исключительно на пространственных измерениях, отбросив временные [23].

Человек созерцает, переживает, постигает неизменное, а потому статичное, пространственно- предметное явление мира. Этот процесс нашел выражение в виде системы жанров и стилей живописи, обеспечивших, как тогда казалось, охват всех сторон жизни и реальности.

Итак, в живописи установился пространственноподобный подход, завершившийся созданием в эпоху Возрождения прямой геометрической и воздушной перспективы. Использование перспективы обеспечивало измеримость, достижение пространственного единства, возможность изображения бесконечности как некоторой глубинности, как последовательности предметов, равномерно уменьшающихся в размерах, теряющих четкость очертания.

Далее было обнаружено несоответствие, вызванное полным приглушением фактора времени. В XIX веке развитие пошло в русле ликвидации этого несоответствия. Возникает импрессионизм, реализовавший некоторые открывшиеся элементарные закономерности временного бытия.

В целом художественное восприятие окружающего мира кристаллизовалось в четко определенные основы, систему пространственно-предметного видения, открытие которой история живописи связывает с Джотто, жившего в XIV веке. В дальнейшем эти основы были последовательно доведены до строгой, практически канонической формы усилиями живописцев - перспективистов XV века. Следующий шаг в развитии живописи был совершен в эпоху Возрождения, открытием за-

конов перспективы, и затем в XVII - XIX веках ее основы углублялись и усложнялись до тех пор, пока в искусстве импрессионистов живопись не дошла до своего логического конца, не столкнулась с неразрешимыми в ее рамках противоречиями, не исчерпала своих возможностей [22]. Тем самым было завершено создание пространственноподобной системы живописи, которую можно определить также как классическую систему, или как систему линии и рисунка, или как систему "дубликатов" по образному выражению Малевича [21].

Стало ясно, что динамическая действительность во всем своем многообразии никак не уместается в статичные по своей природе формы классической живописи. В сложившейся ситуации П. Сезанн был тем художником, который в полной мере сумел оценить место и свойства классической живописи, почувствовал необходимость нового искусства. Начав эту работу, он поставил, и решил задачу создания второй системы живописи, обеспечил разработку основ этого нового способа художественного творчества.

Основной мотив его деятельности состоял в убежденности, что ограничения классической системы носят объективный характер и преодолевать их надо не усовершенствованием, а путем коренного пересмотра, выхода за пределы границ традиционного искусства. Он считал также ошибкой отождествление традиционного искусства и природы. Природа фундаментальнее и глубже, поэтому выход надо искать не в игнорировании природы, а в углублении ее изучения. В природу надо вглядываться с таким напряжением, от которого начинают "кровоточить глаза", - писал Сезанн.

Собственно это изучение и вывело его на путь обнаружения и утверждения новой художественной системы, и может быть именно теперь, когда удалось доказать существование двух систем представления чисто математическим и логическим путем, становится ясной и понятной та огромная аналитическая работа, которую совершили живописцы, решая, по существу, ту же самую задачу. Становятся понятны-

ми их действия и результаты.

Прежде всего, П. Сезанн дерзнул решительно пересмотреть взгляд на пространство, время и цвет. Это уже не самостоятельные, а крепко связанные между собой категории. Впервые в истории искусств пространственное существование было соединено с существованием во времени. Ради художественного эффекта Сезанн начинает свободно манипулировать формами пространства, времени и цвета в их сочетании, заставляет эти формы решать задачи как бы на первый взгляд им несвойственные, добиваясь эффекта не порознь, а за счет их взаимодействия. Интенсивность цвета определяется у него не только степенью реальной освещенности предмета, но и мерой его статики и динамики, мерой его внутреннего напряжения. Цвет предмета начинает зависеть и от внутреннего противоборства материи и формы. В рамках одного полотна художник использует сочетание перспектив, например, сфероидное с элементами прямой и обратной перспектив. Пространство у него может округляться, может применяться несколько точек схода в пределах одного полотна. Предметы могут внезапно увеличиваться, вместо того чтобы уменьшаться, организовываться по разному: то по принципу прямой, то обратной перспективы. Картина в новых основах может строиться не только от зрительной плоскости в глубину, а наоборот от глухого и непрозрачного фона к зрителю. Не только даль и близь, но и верх и низ превращаются у Сезанна в относительные категории и т.д.

Приведем пример восприятия его творчества художественной критикой по его картине "Горшок и фрукты"[29]. " Блюда с фруктами опрокидываются в сторону зрителя, плоды чудом удерживаются на покатых поверхностях, повинувшись законам живописного тяготения, очевидно, отличным от ньютоновских. Они занимают большую часть поверхности стола, не оставляя, казалось бы, места реальной глубине, а все же круглясь, демонстрируя всю свою полновесную объемность вне зависимости от местоположения - на первом плане или в глубине, утвер-

ждая свою прочную устойчивость, непререкаемую убедительность своего места в пространстве.

Характерное для классической живописи противопоставление предметов в пространстве здесь отсутствует. Предметы не столько расположены в пространстве, сколько сами строят его, отсчитывая его протяженность точно также, как мазки кисти отсчитывают пространственную объемность самих предметов, и поэтому они неразрывно связаны с пространством, сделаны из одного с ним "красочного теста".

Пространство становится здесь функцией объема, объем - функцией цвета, цвет формируется из сложного взаимодействия холодных и теплых тонов, а мазки кисти подобны клеточкам универсальной материи, посредством которых Сезанн строит царственно богатый мир. ...прогибается и ломается поверхность стола в местах ее соприкосновения с предметом, сохраняя в тоже время плоскостность и прямизну своих граней. Натюрморт ... был своего рода лабораторией художника, в которой он разрабатывал закономерности живописного пространства, ... осуществляя идеи построения картины как целостного организма.

Знаток искусства Н.Н. Пунин говорил: "Возьмите натюрморт голландского мастера XII века и попробуйте мысленно вынуть из него какие-нибудь предметы, - лимон, блюдо или бокал, - и они тотчас же окажутся в Ваших руках. Но если Вы попытаетесь снять с натюрморта Сезанна хоть один персик, то за ним потянется весь холст." (П. Сезанн, Натюрморт; Х. Миро, Стол с перчаткой).

Главная ошибка восприятия произведений новой системы живописи состоит в том, что от них требуют, чтобы они выполняли ту же задачу в изображении мира и предметов, какую выполняют произведения классической системы. Отсюда непонимание, пренебрежение и, в конечном счете, отторжение направления, но это абсурд: свои основы - свои возможности, ориентация на изображение других сторон действительности. Трудами не только П. Сезанна, но и трудами многих других художников, последовавших за ним, эти возможности были установлены.



*П.Сезанн Горшок и фрукты. 1895*

Новая система изменила предметную область приложения живописи. Например, новый взгляд на перспективу предоставил право художнику двигаться вокруг предмета, включать в его живописный облик информацию, почерпнутую из предшествующего опыта или знания.

Возникающая при этом красота носит глубинный характер, в отличие от красоты зримой вещи [24]. Новые методы предоставили возможность проникать в сущность вещей, минуя чувственную видимость, обеспечивают господство концепции над непосредственным зрением.

Конечно отказ от гегемонии пространства, от обособленной линейной перспективы ограничивает возможности в изображении бесконечного. Объем пространства в картине становится конечным, ограниченным по своему размеру, а изображение бесконечного заменяется на изображение глубинного, которое может углубляться сколь угодно. Возникает возможность качественного, структурного анализа. В результате этого очевидным образом усиливается роль поверхности, особенно окрашенной поверхности, что хорошо заметно в произведениях этой живописи.

Картина в этой системе не рисунок природы, поэтому живопись отходит от конкретного предмета, поэтому в ее изображении предмета всегда присутствует некоторое обобщение. Теряя в конкретности, художественная форма обретает качество общности. Основной задачей картины становится поиск и изображение групповых черт объекта (К. Малевич, Крестьянин в поле).

Очень хорошо уловил возможности новой живописи Бердяев, который говорил, "что это изображение более начальной стадии, чем законченный предмет", что это возможность "еще дальше пойти вглубь, где нет уже никакой материальности - там уже внутренний слой природы, иерархия духов".

Живопись "как бы ведет к выходу из физической, материальной плоти в иной высший план". При этом "искусство есть своя собственная реальность; оно есть раскрытие или создание объективного мира, а не изображение" [26].



**Х. Миро Стол с перчаткой. 1921**



Очень точно оценил новую систему живописи А. Глез. "Время - форма" встало на место "пространство - форма", написал он еще в 1924 году [25]. Все сказанное выше, а также сопоставление с математическими моделями "устройства" второй системы живописи, позволяет именовать ее времениподобной системой.

Итак, П. Сезанн, освободив живопись от изображения природы, создал основы второй системы живописи, которая, как и первая применялась, как предметная. Совершив этот эстетический скачок, Сезанн как бы указал дорогу, открыл дверь для творческих исканий.

Одно из таких совершенно новых направлений - это исследование структуры формы, которое выполнили кубисты. Вот некоторые исходные установки для кубистической живописи.

"Кубист стремится проникнуть в строение объективных вещей, изобразить их в анатомическом разрезе, создать наглядную модель их микроструктуры".

"Не нужно только изображать предметы, нужно проникнуть в них".

"Кубизм хочет обеспечить зрителю нечто прочное, опирающееся не на иллюзию, а на знание".

"Только плоское достоверно".

Результатом кубистических исследований формы стало открытие роли простых геометрических форм, - треугольников, квадратов, окружностей, полуокружностей и т.д., - как основы формообразования. Многочисленные живописные эксперименты показали, что применение этих простых форм обеспечивает формирование любой фигуры. Кубистические конструкции это демонстрация безграничных возможностей созидания во взаимодействии простых форм. (П. Пикассо, Натюрморт)

На математическом языке это не что иное, как утверждение существования базовой системы признаков, возможность разложения изображения в этом базисе. За этим, как известно, стоит решение вполне актуальных и конкретных технических задач по распознаванию, по сжатию изображения.



*К.Малевич Крестьянин в поле. 1928-1932*

У кубистов, а также во многих других направлениях нового искусства заметно возникновение ощущения неоднородности пространства. Выражается оно через использование множества контрастных по окраске плоскостей, пересекающихся под разными углами друг с другом, через изображение изломов и деформаций формы.

Другое направление исследования это поиск предельно простой формы времениподобной системы живописи. То что она должна быть, следует из развитой выше математической теории времениподобного подхода. Основное влияние на развитие событий в этом направлении по-видимому оказал Кандинский, пришедший к идее ухода от зримой предметности к беспредметности. Сложность этой как и всякой другой эволюции не на математическом, а на чувственном уровне в том, что все время надо обеспечивать сохранение на интуитивном уровне тех внутренних законов, тех граней, которые отличают художественное произведение от всего остального.

Рассмотрев в качестве начала в искусстве исключительно его духовное содержание, Кандинский пришел к убеждению, что средством выражения этого содержания является комбинация беспредметных форм. Завершил эту эволюцию К. Малевич созданием супрематизма. Это был решающий скачок в беспредметность. Суть его в отделении непрерывности как таковой от всего остального, в представлении ее в виде поверхности, окрашенной в цвет - абсолютный носитель качественного начала. Объектами супрематического мира стали, как известно, части поверхности. В возникшем разнообразии центральное место занял черный квадрат. Безусловно это был точный и главный шаг к позиции, которая приблизила художественное восприятие к самым основам мироустройства, к позиции, поставившей художника и зрителя перед лицом Ничего и Всего.

Этот краткий анализ показывает, что развитие живописи привело к утверждению той же самой идеи существования двух форм представления. Ее основы предстали в живописи в завершенном виде, как со-

вокупность двух форм со свойствами симметрии и асимметрии.

Таким образом, приходится констатировать, что живопись смогла пройти тот путь развития, который оказался не под силу ни математике, ни физике, ни тем более технике. В отсутствии теории, на интуитивном уровне мышления, усилиями лучших своих представителей в живописи была создана законченная система представления, включающая две основные части, два независимых начала. Эта система в полной мере соответствует позиции, принятой в книге и развитой выше теории.

### **5.3. Вакуум, изображение, движение**

Материал этого параграфа во многом следует не только фактам, но и интуиции, объединяет элементы расчета и догадки и тем самым в большой степени смыкается со способом мышления в искусстве и, конечно, в живописи.

В основу теории представления, развиваемой в книге, положен принцип двух начал, хорошо известный в физике как принцип дополненности Бора, выступающий в ней как некий абсолют, как основополагающий принцип физического мира. И если следовать неумолимой логике всего предыдущего материала, то вакуум как электромагнитное или гравитационное поле это лишь один способ его представления. Равноценно с этой физической моделью должна рассматриваться некоторая вторая его модель.

Напомним, что первая модель была предложена в процессе объективизации физического мира усилиями представителей математического направления в науке. Эта модель не может претендовать на абсолют по очень многим причинам и хотя бы потому, что математический взгляд на природу пространства обеспечивает только количественное описание, а сущности понятий остаются при этом вне досягаемости [31,32].



***П. Пикассо Натюрморт. 1923***

Логическое направление объективизации физического мира, развитое в данной книге, приводит ко второй модели вакуума, совсем по-другому обеспечивающей описание его сущности и, в частности, процесса движения. Вторая модель вакуума представляет его как цифровое поле информации, это уже не электромагнитный, а цифровой ячеистый вакуум.

Сама по себе эта идея достаточно давно возникла как гипотеза в физике. Своим появлением она обязана квантовой теории. По мере осознания роли и свойств квантовой теории стало ясно, что квантовая механика не может быть выведена из классической механики. Причина этого одна, - они основываются на разных постулатах. Из квантовой теории следует, что энергия излучателей или волновая функция меняется скачком. Поскольку подобное возможно только в случае информации, то предположение о существовании модели в виде поля информации кажется естественным и логичным[32].

Того же самого, вообще говоря, требует принцип дополнительности, имеющий множество примеров его справедливости. В соответствии с этим принципом возможны два класса экспериментальных установок: первый класс допускает определение импульсно - энергетических соотношений, а второй - пространственно-временных. Одновременное применение обеих типов установок исключается.

Кажется, что все ясно, однако приходится констатировать, что физики не нашли средства реализации этой идеи. Ее развитие пошло по другому пути, - по пути применения квантовой теории к электромагнитному полю. Физики несмотря ни на что тем самым признали де-факто подчиненную роль методов квантовой теории. Последнее вынудило физиков объявить, что симметрия является более общим и главным свойством объективной реальности, а асимметрия возникает только в результате частичного нарушения симметрии. Это заблуждение и составляет основу всей методологии современной физики, и это несмотря на то, что ее развитие в XX веке свелось к доказательству сущест-

воования волновых свойств у частицы, т.е. протекало в духе утверждения дуализма волна- частица.

Рассмотрим движение объекта, на который действует статическая сила тяжести (гравитационное поле). Если объект находится на некотором расстоянии от массивного тела, создающего гравитационное поле, то в направлении к границе движения, т.е. к поверхности массивного тела, объект движется равноускоренно, при этом движение в обратном направлении от границы движения к начальному положению является равнозамедленным.

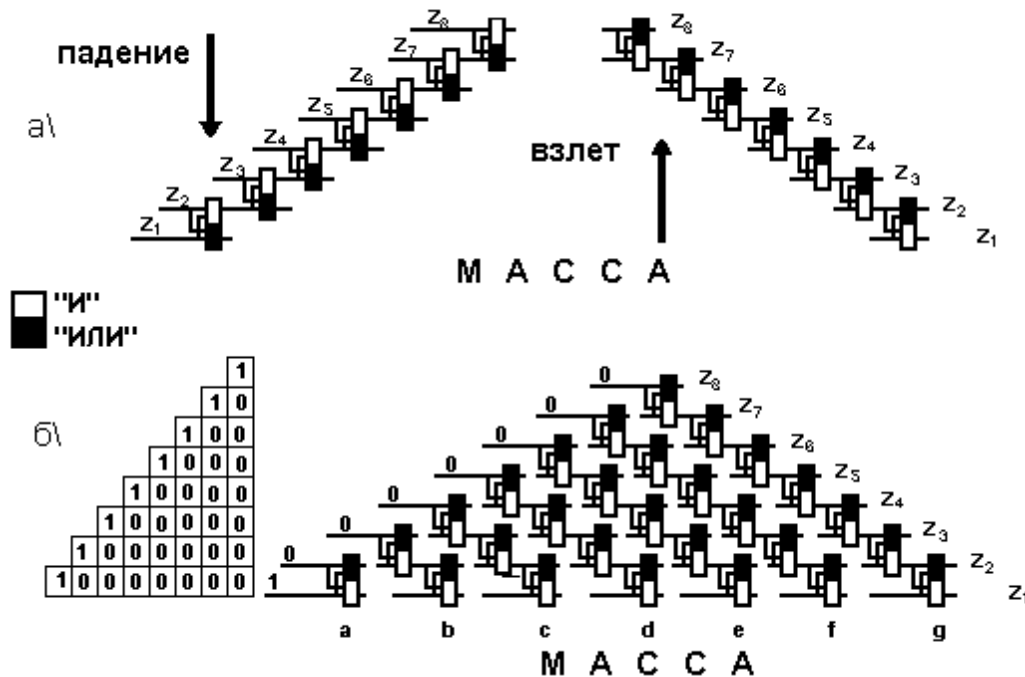
Шар весом в 2 Кг падает также быстро как шар весом в 1 Кг. Вес тела не влияет на характер движения, поэтому при исследовании движения можно переходить к двумерному изображению объектов на плоскости, где такой объект определяется своим сечением или проекцией, образующих определенную форму или фигуру (круг, прямоугольник и т.д.).

Закон тяготения, сформулированный Галилеем в рамках классического пространственно- временного представления вакуума, не использует понятие массы и звучит следующим образом:

"Пространства, проходимые падающим телом за равные промежутки времени, относятся между собой как последовательные нечетные числа".

Альтернативным образом будем считать, что вакуум квантован в направлении перпендикулярном к направлению движения. Движение объекта происходит путем последовательных мгновенных перескоков с текущего уровня на более низкий при свободном падении и на более высокий уровень при подъеме. Теперь характер движения определяет не скорость или ускорение, а время пребывания на уровне.

Как ранее было показано, объект в этом случае необходимо представить совокупностью симплексов на уровнях квантования. Длина симплексов и количество занимаемых уровней квантования определяется формой объекта.



**рис. 32. Вакуум как поле информации, перестроенное в вертикальном направлении: а) исходное поле информации; б) поля информации при взлете, последовательно при переходе с уровня на уровень**

В этой модели истинное положение объекта привязывается (округляется) до ближайшего уровня квантования. Обратный переход к объекту может быть выполнен только с определенной величиной вероятности, что является принципиальным свойством этой модели.

В соответствии с развитой выше теорией квантованный вакуум предстает как логическое поле информации в виде простейшей логической структуры, образованной множеством узлов, элементарных двоичных вычислителей локальных максимумов и минимумов, ячеек "И" или "ИЛИ". Присутствие массивного полеобразующего тела вызывает напряженное состояние, перестройку логических связей узлов при условии упорядочения размещения узлов строго в вертикальном направлении. Эта совокупность узлов и образует как бы линию гравитационной связи.



Можно использовать несколько эквивалентных способов построения напряженной структуры поля информации. Кроме того, ее довольно сложно изобразить, если попытаться сохранить размещение двоичных вычислителей друг над другом. Примем условно, что они слегка разнесены в пространстве плоскости относительно их вертикального размещения, это необходимо также для показа последовательности их срабатывания, тогда имеем диагональную структуру, приведенную на рис. 32а.

Перестроенное поле информации это фактор, обеспечивающий движение. Рассмотрим это на примере свободно взлетающего объекта минимальных размеров, рис. 32б. Его исходному положению соответствует самый левый вертикальный столбец в левой таблице на рисунке, в котором  $z_1 = 1$ . В следующем положении  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  и т.д. Движение происходит шагами, и в поле информации для каждого текущего положения объекта производится вычисление следующего положения объекта, обеспечивающее его смещение на один уровень квантования вверх, т.е. на один шаг. Примем время первого шага за единицу. Очевидно, что длительность каждого следующего шага будет увеличиваться на единицу и достигнет максимума в наивысшем положении. После окончания пребывания объекта в наивысшем положении аналогичным образом начнется свободное падение объекта. Заметим, что в режиме падения логические функции у связанных элементов меняются на дополнительные значения.

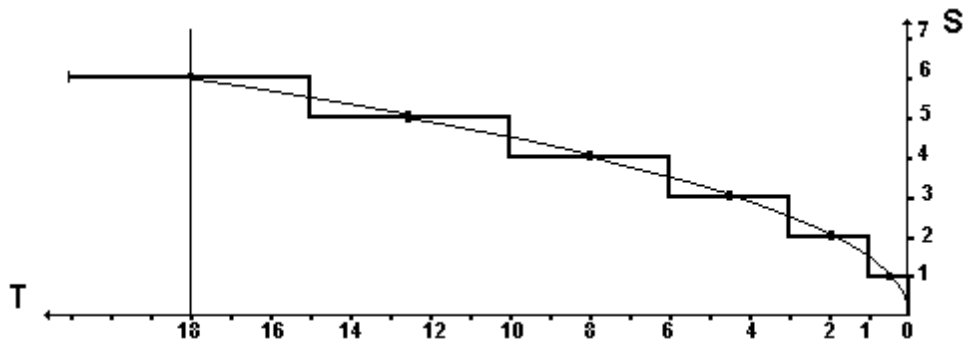
Если схемы полей информации модели разместить в той последовательности, как они фактически используются в следующих друг за другом шагах вычисления, то они образуют схему сортировки симплексов в том виде, в котором она представлена на рис. 9 (стр. 57).

Согласно данной модели вакуум подобен некоторой всеохватывающей, глобальной, но достаточно простой вычислительной среде, которая обеспечивает на информационном алгоритмическом уровне перемещение всех объектов во вселенной. В этом аспекте постоян-

во скорости распространения электромагнитных колебаний в вакууме следует воспринимать, как результат существования некоторого всеобъемлющего генератора, обеспечивающего определенную скорость срабатывание ячеек поля информации.

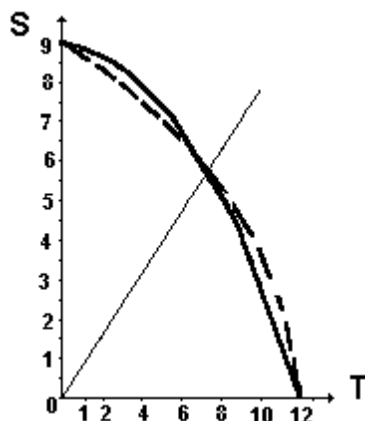
Отметим, что описанная выше процедура организации движения легко реализуется на компьютере. Будем считать, что горизонтальные линии развертки его экрана воспроизводят квантованное пространство. Если выводить на экран последовательно после каждого шага вычисления положение симплексов произвольной фигуры, то тем самым обеспечивается воспроизведение ее свободного падения или подъема в поле тяготения.

Как было установлено ранее, характеристики времениподобного представления подобны характеристикам пространственноподобного представления и отличаются от них тем, что повернуты на девяносто градусов и являются не непрерывными, а ступенчатыми функциями. Построим график зависимости перемещения объекта от интервалов времени в поле информации. Этот график приведен на рис. 33.



**рис. 33. График зависимости перемещения объекта от интервалов времени в поле информации**

Очевидным образом изображенная там ступенчатая функция, связана с горизонтально расположенной параболой (параболой повернутой на девяносто градусов).



**рис. 34. Два закона движения в сопоставимых масштабах**

Если учесть, что нечетное число всегда может быть разложено на сумму двух рядом стоящих чисел (четное и нечетное) и, если рассмотреть последовательность нечетных чисел попарно, и просуммировать у рядом стоящих значений одинаковые числа в разложении, то возникает ряд четных чисел или, что тоже самое, ряд последовательных целых чисел, соответствующий этой ступенчатой функции. Это позволяет предложить второе определение для закона всемирного тяготения: "взлетающее тело проходит одинаковые пространства за интервалы времени, которые относятся между собой как последовательные целые числа".

Это определение является дополнительным к определению, данному Галилеем, и не может быть никакими способами выведено из него, так как основывается на принципиально других предположениях.

На рис. 34 приведены оба закона одновременно в сопоставимых масштабах. Вместо ступенчатой кривой для дополнительного закона показана парабола (штриховой линией), к которой устремлена ступенчатая кривая при уменьшении шага квантования. Из рисунка следует, что характер свободного движения по двум законам немного отличается, хотя время и пройденный путь в конечном счете одинаковы. За счет квантования объект как бы быстрее перемещается в начале и в конце пути, сначала опережает, а потом догоняет. В средней же части движение уравнивается.

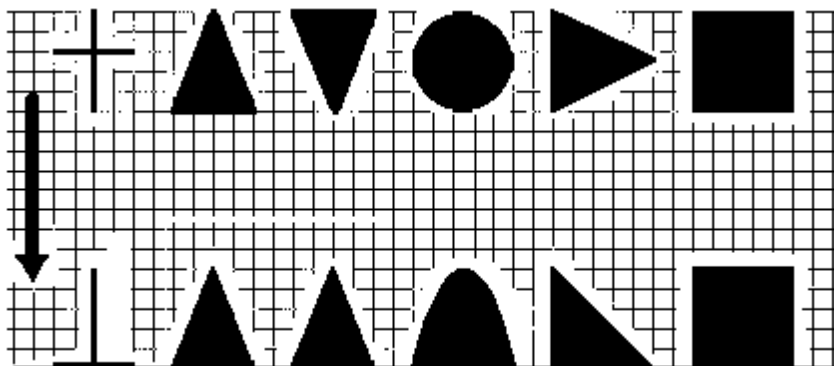
В обычных условиях, когда размеры объектов несопоставимы с размерами квантов пространства, нет необходимости в использовании второй модели. Однако существование двух моделей следует воспринимать как тот факт, что классическая модель все же описывает феномен движения только приближенно, что вопрос об обнаружении отклонения не исключается, хотя конечно оно очень мало. В случае микрообъектов вторая модель должна оказаться полезнее и точнее, хотя нуждается в экспериментальном подтверждении. Ее использование открывает совершенно новые перспективы в исследовании вакуума, поскольку логическое направление дает принципиально другое толкование этого важнейшего физического объекта мира, восстанавливает в отношении него принцип дополнительности.

Вновь обратимся к живописи. Мотив движения, ощущение движения было подвергнуто здесь серьезному исследованию. Пожалуй, лучшие примеры можно найти в творчестве импрессионистов и авангардистов. Многие художники связывали его с изменением цветности, с возникновением изломов и фазовых переходов в пространстве цвета, т.е. частоты электромагнитных колебаний в пространстве и его интенсивности.

Занимался исследованием этого феномена и К. Малевич. Его позиция, по-видимому, следует за установкой Аристотеля, считавшего, что движение, как неотъемлемое свойство мира, есть свойство, обеспечивающее образование формы. Малевич демонстрировал, как путем сдвигов и перемещений квадрат трансформируется в "черные крестовидные плоскости" (авторское название черного креста). Тем самым Малевич полагал, что в рамках супрематизма движение можно определить, как переход от формы черного квадрата к более сложным формам: черному кресту или черному кругу.

Движение квантовое есть движение, связанное с изменением качества, в данном случае в виде перемены уровня размещения симплекса. По информационной модели вакуума движение, вообще гово-

ря, привносится некоторым универсальным природным двигателем, который, таким образом, есть начало движения.



**рис. 35. Трансформация фигуры при падении в информационном поле тяготения**

Рассмотрим перемещение объекта произвольной формы с помощью напряженной логической структуры. Если размеры объекта таковы, что он занимает несколько уровней квантования, то при соприкосновении объекта с границей движения происходит перегруппирование симплексов или трансформация объекта. Примеры трансформации приведены на рис. 35.

Квадрат или прямоугольник является единственной фигурой инвариантной к перемещению в любом из возможных четырех направлений движения. Последнее лишней раз подтверждает прозорливость Малевича в отношении выбора первофигуры.

#### **5.4. Музыкальная гамма**

Музыка как и живопись входит в группу разновидностей человеческой деятельности, образующих искусство. И та и другая, но каждая своими средствами, обеспечивают практически – духовное развитие и освоение мира, которое осуществляется не на количественной, а на качественной основе.

Еще в древности возникло убеждение, что чувство красоты музыки должно иметь в своей основе строгое математическое обоснование.

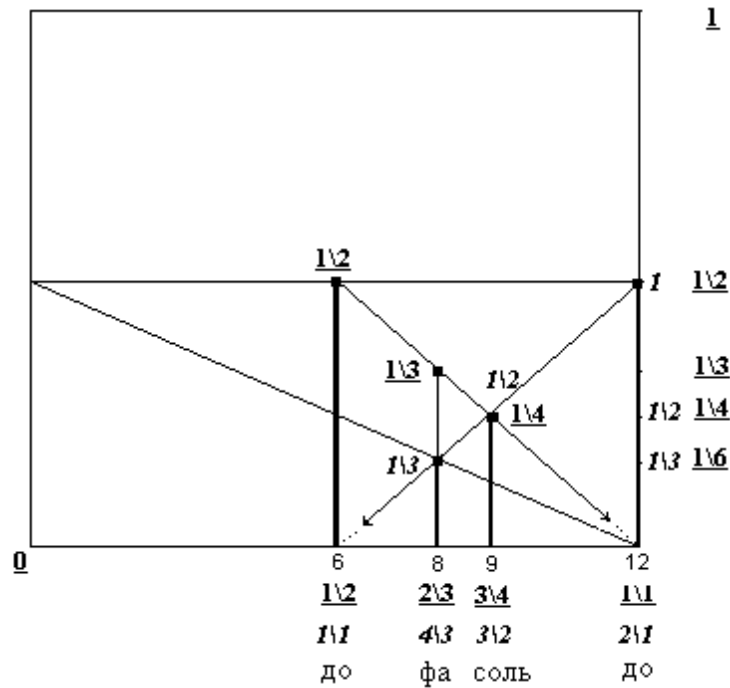
Поиск в этом направлении привел пифагорейскую школу к открытию в музыке числовых отношений для звучащих струн. Так, пропорция 1:2 выражала октаву, 2:3 - квинту, 3:4 – кварту и т.д. Таким образом, уже тогда была установлена фундаментальная связь между миром простых числовых отношений, миром интервалов и музыкальной шкалой.

Не только музыкальная шкала, но и музыкальное произведение основано на интервалах. Поэтому становится понятной необходимость использования принципа асимметрии, времениподобного подхода, как метода моделирования, по отношению к музыке. Более того, этот методологический принцип должен быть здесь основным: музыкальное произведение, развертывающееся во времени, по своей сути не способно оборачиваться вспять, также как само время.

Хотя математика времениподобного представления импульсных сигналов создавалась исключительно для решения технических задач, она целиком применима для моделирования музыкального ряда.

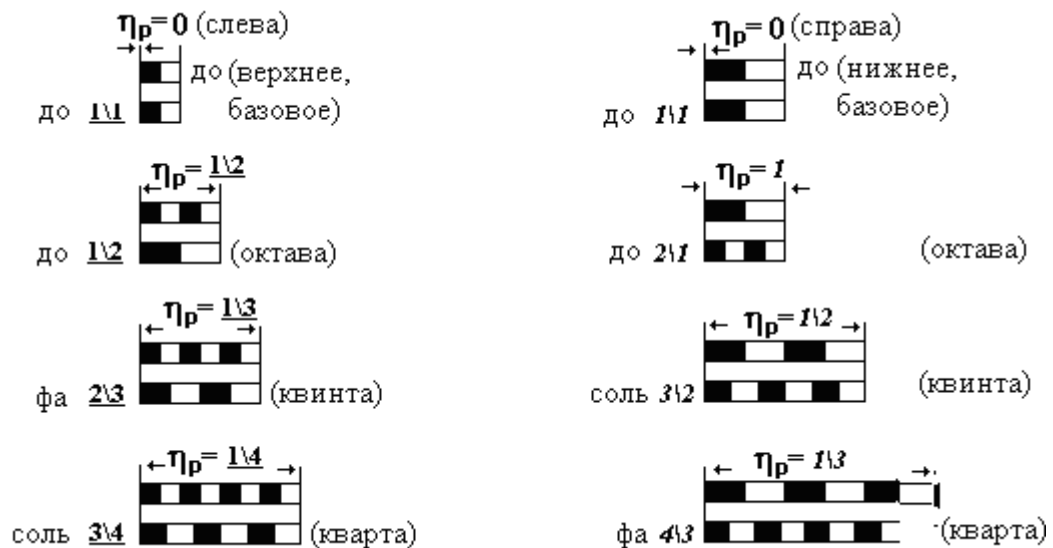
Музыкальный звук содержит обертоны, поэтому в качестве его приближения можно использовать последовательность импульсов. В этом смысле это приближение точнее, чем приближение с помощью гармонического сигнала. Теперь музыкальный интервал- это интервал периода разностной частоты двух последовательностей импульсов.

Рассмотрим формирование тетрады, составляющей основу звуко-ряда. На первое место здесь следует поставить самый простой случай, а именно, случай пары последовательностей импульсов, отличающиеся не более чем на один импульс на интервале не более чем четырех импульсов. Собственно интервал, как период разностной частоты, принимает при этом значения либо  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$  и ноль в пределе, либо  $1/1$ ,  $1/2$ ,  $1/3$  и ноль в пределе.



**рис. 36. Шкала ступеней тетрады**

Построение шкалы ступеней приведено на рис. 36, а временные диаграммы пар последовательностей импульсов для тетрады приведены на рис. 37.



**рис. 37. Временные диаграммы тетрады**

В исходном квадрате «1x1» здесь выделены два подквадрата

«1\2x1\2», левый и правый. Значения разностной частоты звуковой шкалы располагаются на диагональных линиях правого подквадрата и соответствуют начальным точкам диагональных линий, точке пересечения диагональных линий и точке пересечения диагональной линии подквадрата и диагональной линии двух подквадратов, объединенных в одну фигуру.

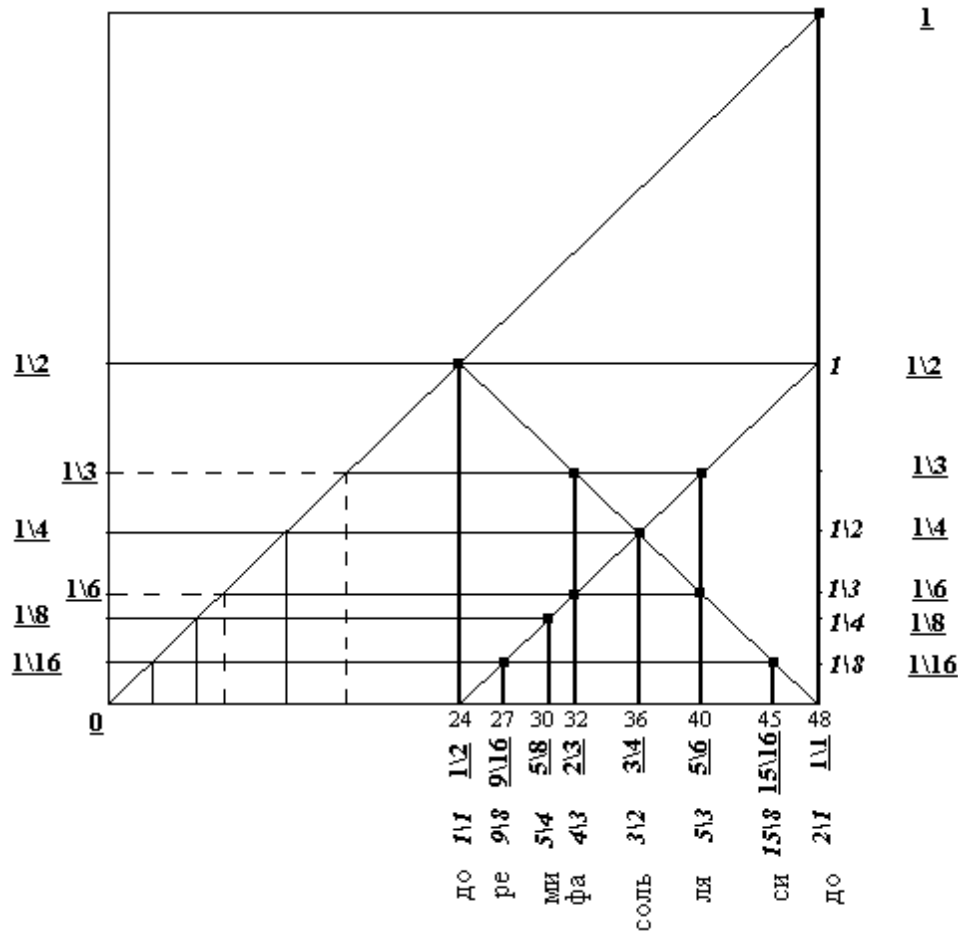
Показанное на рисунке построение обеспечивает образование тетрады и всех сопутствующих ей отношений. Тетрада состоит из одной квинты и одной кварты, разделенных интервалом в целый тон, а вся гамма обнимает одну октаву.

Тетрада обладает следующими свойствами, вытекающими из теории времениподобного представления импульсных сигналов:

1. Тетрада может быть периодически повторена.
2. Тетрада (до, фа, соль, до) образована последовательностями импульсов, которые во всех отношениях (парах) отличаются только на один импульс.
3. Имеет место асимметрия отношений: (фа – до) – квинта, (до – фа) – кварта и (соль – до) – кварта, (до – соль) – квинта.
4. Звук фа в отношениях с нижним и верхним до октавы имеет одинаковые численные значения, но разные величины для разностной частоты. Звук соль в отношениях с нижним и верхним до октавы имеет разные значения, но одинаковые величины для разностной частоты.
5. Кварты до – фа равна квинте фа – до для одного и того же до.
6. Интервал целого тона вычисляется, либо как отношение  $3\sqrt{4}:2\sqrt{3}$ , либо как отношение  $3\sqrt{2}:4\sqrt{3}$  и равен  $9\sqrt{8}$ .

Эти свойства являются результатом применения математической модели, а не эмпирическими характеристиками, как это было до сих пор.





**рис. 38. Шкала ступеней октавы**

Дальнейшая процедура дробления позволяет получить очередные составляющие октавы, рис. 38.

Для удобства собственно дробление показано слева, а его результаты отмечаются в правом подквадрате. Дробление производится двояким способом. Сперва будем проводить уменьшение в два раза, тогда имеем последовательно квадраты со сторонами 1,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ . Затем образуем квадраты путем деления на три. Это приводит к образованию квадратов со сторонами 1,  $1/3$ ,  $1/6$ . Такая процедура дробления обеспечивает формирование основных составляющих звуко-ряда.

В отличие от тетрады, звуки ре, ми, ля, си образованы последовательностями импульсов, которые только в одном из двух отношений со звуками до октавы отличаются на один импульс. Целый тон между зву-

ками соль и ля, одинаковый по величине интервала с определенным ранее, записывается как отношение  $10\backslash 9$ .

Рассмотренная выше модель музыкальной шкалы включает, таким образом, хорошо известные и новые результаты. В части известных результатов имеется полное совпадение, что в данном случае подтверждает правильность самого времениподобного подхода,

Общий же результат состоит в том, что существует не один, а два способа моделирования музыкального звука, используемого в слуховой системе человека. Это асимметричная или пифагорова модель на базе отношений и симметричная модель на базе цепных дробей .

Первый способ приводит к музыкальной системе с не вполне одинаковой высотой некоторых ступеней, а второй способ – к равномерной темперации звуковой шкалы. Безусловно представляется, что асимметричная интервальная модель на базе отношений является более адекватной для описания музыкального звука слуховой системы человека и должна быть основной при реализации в музыкальных инструментах.

В заключение отметим, что применение времениподобного подхода к этой хорошо известной задаче математического построения музыкальной шкалы обеспечивает совершенно новый уровень понимания содержания и устройства самой слуховой системы человека. Не только использованные выше средства, но и все остальные средства времениподобного подхода могут быть применены здесь для моделирования. Это впервые открывают путь для углубленного теоретического исследования и технического воспроизведения слуховой системы человека.

### **5.5. «Книга Перемен»**

Есть несколько причин, заставляющих обратиться в нашем исследовании к этому древнейшему памятнику человеческой культуры. Во-первых, китайская «Книга Перемен» («И цзин», «Чжоу и») представляет собой первую известную попытку создания целостной системы опи-

сания Вселенной, которая была названа в ней Великим Пределом. Сотни лет в далеком прошлом, потраченные на создание и отработку системы, обеспечили, в конце концов, ее основательность и совершенство. Возникло Великое учение, но вместе с тем и Великая загадка, смысл которой мы и попытаемся раскрыть.

При написании данного материала я ориентировался на последние издания перевода и комментариев к «Книге Перемен», изложенные в [35,36]. Как известно, базис системы бытия «Книги Перемен» образуют восемь триграмм. Комбинирование триграмм приводит к шестидесяти четырем гексаграммам, которые потом уже являются самостоятельными единицами, а не просто результатом механического соединения. Шестидесять четыре гексаграммы охватывают все, что нас окружает. Выражено это в образах, сопоставленных гексаграммам. Образы это сгустки свойств, описывающих объекты бытия, их качественные модели.

Картина мира предстает перед нами, как образованная совокупностью частей с ясно обозначенной упорядоченностью. В системе бытия использовано конечное число частей, бесконечное возникает здесь тогда, когда с гексаграммами связываются все новые и новые объекты, число которых неограниченно.

Во-вторых, теория системы бытия «Книги Перемен» является по своему смыслу качественной, опирается на свойства времени, а не пространства. «В то время как в Европе все сводится к категории чистого бытия, в китайской мысли решающую роль играет концепция изменения». [36] Если в Европе за основу принимается единое, т.е. количественное по своей природе, то в китайской философии за основу принимается противоположное. Сделать это можно, если поставить во главу угла движение, а не пространственный объект. «Когда встречаются два несовместимых условия, они могут сосуществовать, следуя друг за другом. Это и есть главная идея «Книги Перемен»: время порождает одновременно противостояние и соучастие». [36]

В глубочайшей древности было установлено, что если принять за основу противоположное, то таким образом, оказывается, можно объять все, что нас окружает. Эта точка зрения замечательным образом сформулирована в книге «Дао де цзин», написанной в IV в до н.э.: «Когда в Поднебесной узнали, что красота – это красота, появилось и уродство. Когда узнали, что добро – это добро, появилось и зло. Вот почему бытие и небытие друг друга порождают, трудное и легкое друг друга создают, короткое и длинное друг другом измеряются, высокое и низкое друг к другу тянутся, звуки и голоса друг с другом гармонируют, предыдущее и последующее друг за другом следуют».

Как система бытия это картина образов, которая и была создана, отточена и составляет содержание «Книги Перемен». Эта система включает также философию функционирования общества, отдельного человека. Она представляет жизнь как поток перемен, превращений, структурных перестроек.

Зададимся вопросом: «Случайно ли, что такая система возникла в таком виде, а не как европейская система единого?» Ответ, как мне кажется, здесь может быть дан однозначный: «Для этого есть серьезные причины. Они кроются в существовании связи с общим историческим процессом развития мышления».

Историческая наука считает, что система «Книги Перемен» создавалась в период самой ранней стадии развития мышления. Это был период, когда проходило или заканчивалось формирование основных понятий, обеспечивших, собственно, язык мышления и возможность накопления знаний. В это время использовался исключительно качественный способ анализа, поскольку мышление было основано на здравом смысле и интуиции.

Хотя начинает складываться понятие числа для объектов и понятие арифметических операций, устный счет, возникают примитивные представления о равенстве слагаемых, но на первом месте здесь не счет и арифметические отношения, а отношения эквивалентности и

порядка. Скорее всего, последние также в самой примитивной форме, такой как указание на соседство объектов друг с другом, связанность пары объектов, сходство по какому-то признаку. Собственно это и определило тип системы «Книги Перемен».

Только постепенно и значительно позже арифметический счет, отличавшийся поразительной определенностью, набирает темп, завоевывает ведущие позиции. Начинается длительный период создания математики, как науки о количественных отношениях объектов действительного мира, а вместе с ней и длительный период формирования количественного мышления. Преимущество и эффективность количественных методов, измерений над качественной оценкой было настолько очевидным, что количественное мышление начало доминировать во всех областях деятельности: в идеологии, в практике, в науке. Вот почему европейские системы бытия, которые создавались позже, уже были развиты на количественной основе.

Период формирования количественного мышления растянулся на две тысячи лет, вплоть до нашего времени. Конечно, параллельно происходило развитие методов качественного мышления, но этот процесс все время как бы оставался на втором плане, а во многих областях, по существу, был прекращен или не начинался.

В науке своеобразными вехами на пути продвижения методов количественного мышления стала деятельность Архимеда, Галилея, Ньютона, последовательно усиливавших их возможности до такой степени, пока они не превратились в то, что мы называем современным научным и техническим знанием. Однако спираль развития, как мне представляется, вновь возвращает нас к качественному методу, как к приоритетному направлению. Собственно эта мысль является ключевой в моем исследовании. Отсюда понятен интерес к системе «Книги Перемен».

В третьих, сопоставление показывает, что в построении системы «Книги Перемен» нет никаких отклонений от концепции, развитой в

данной работе. «Книга Перемен» это не более и не менее, чем древнейший, а поэтому первый пример времениподобной системы.

При построении системы времениподобный подход исходит из применения асимметричного начала, когда целое предшествует части, общее – частному. Точно также в «Книге Перемен» вначале конкретизируется представление о Великом Пределе, как о вместительности всего того, что нас окружает, а затем он делится на две части Инь и Ян, дополняющих друг друга в определении Великого Предела. После этого следует процедура дальнейшего дробления до уровня гексаграммы (образа, понятия).

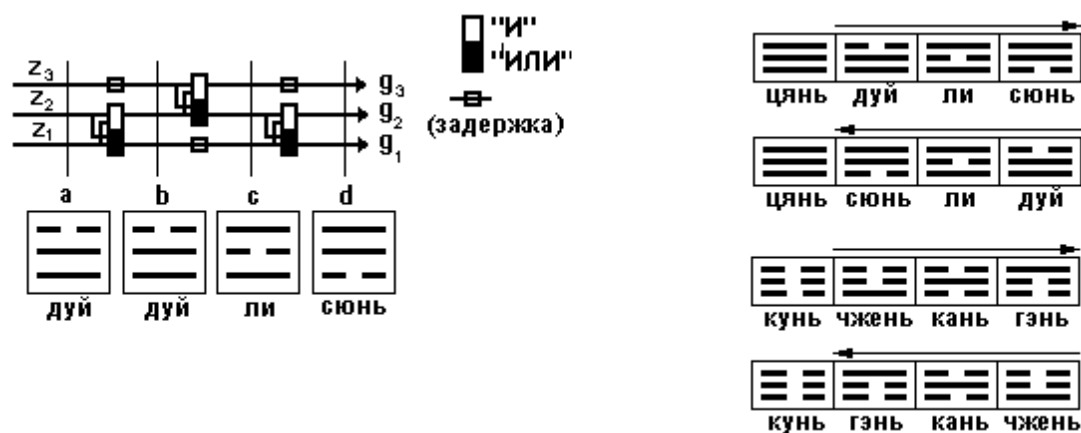
Для гексаграмм вводятся отношения, которые определены простейшим образом, как отношения соседства по признакам дополнительности, преемственности в содержании или в подходах. Если пользоваться общепринятыми числами - номерами гексаграмм, что на самом деле совсем не обязательно, то это можно записать, как разбиение шестидесяти четырех гексаграмм на пары (1,2), (3,4),.... (63,64). «Важны не заданные раз и навсегда понятия, но отношения между ними – жизнь понятий, в которой проявляется динамика противоположностей». [36]

В системе, построенной таким образом, существует поток перемен. Этот поток описывается на языке превращения гексаграмм. Поток перемен это непрерывный процесс, не только разделяющий, но и связывающий все воедино, поэтому нет противоречия между понятием “Перемены” и известным утверждением: “Перемены – это неизменное”. Гексаграмма в данном контексте это не состояние системы, а приближенная характеристика системы в данный текущий момент времени.

Описанная выше структура (иерархия) и отношения это то, что образует систему «Книги Перемен», поток перемен это процесс ее функционирования, а все вместе это времениподобная модель того, что принято называть жизнью.

Несмотря на отмеченное соответствие, имеется один вопрос, который нуждается в детальном обсуждении. Речь идет о том, что в процессе разработки концепции времениподобного подхода удалось математически описать движение, что является принципиально новым шагом вообще и в этой концепции в частности. Движение определено нами, как результат процесса преобразования в логическом поле вакуума, которое реализуется путем вычисления локальных максимумов и минимумов или путем сортировки симплексов. Этот алгоритм не мог быть известен в те далекие времена, поэтому система «Книги Перемен» должна быть проанализирована с этой стороны. Сразу отметим, что его применение дает ответ практически на все накопившиеся вопросы.

Сначала воспроизведем алгоритм движения для случая триграмм, т.е. для случая пространства, квантованного на три уровня. Соответствующая схема приведена на рис. 39.



**рис. 39 Преобразование триграмм**

Схема для гексаграмм строится по тому же принципу, но отличается числом уровней, которых должно быть уже шесть. Для удобства в схему введены задержки, позволяющие разделить выполнение алгоритма на условные этапы, следующие друг за другом. Считается, что величина задержки равна длительности преобразования в логических

схемах. Для данной схемы имеем, следовательно, четыре этапа (от а до d) преобразования при движении от входа к выходу.

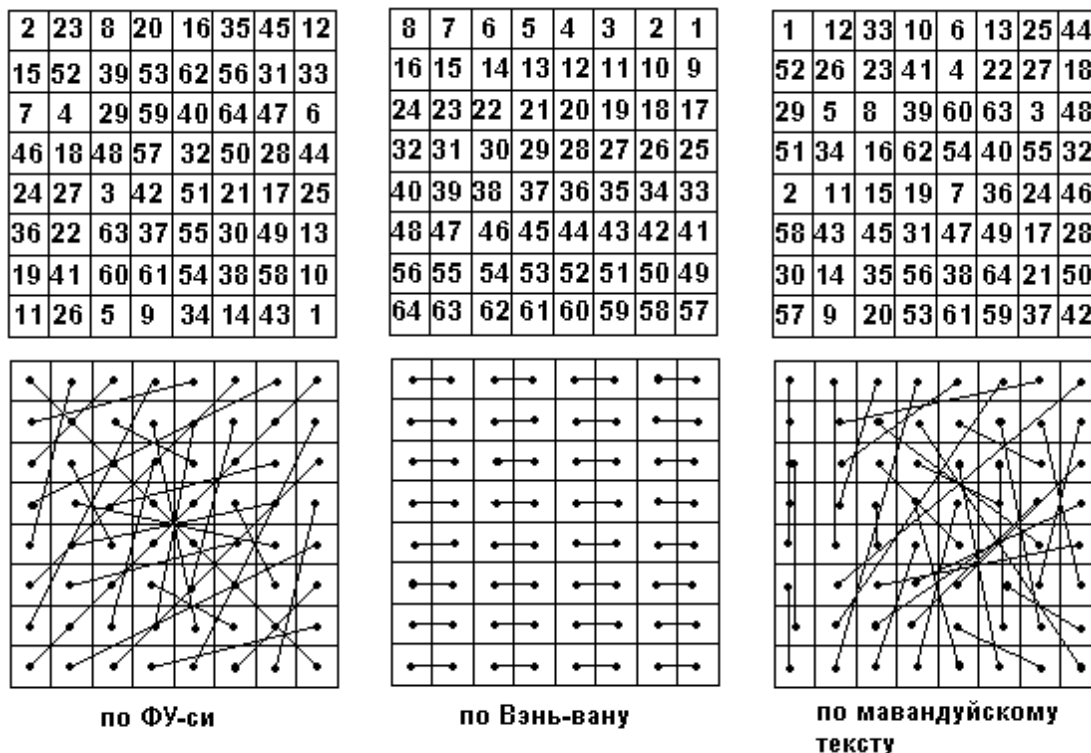
У триграммы, преобразование которой предполагается проследить, прерывные линии заменяются, например, единицами, а непрерывные - нулями. Будем называть этот способ кодирования основным. Если прерывные линии заменяются нулями, а непрерывные единицами, то это дополнительный способ кодирования. Теперь можно проследить по этапам что происходит с триграммой при движении.

Процесс преобразования заключается в том, что анализируются пары линий триграммы, расположенные рядом, и, в зависимости от направления движения, либо все остается без изменения, либо линии меняются местами, если в паре находятся линии разного типа. При основном способе кодирования прерывные линии последовательно продвигаются на более низкие уровни, а непрерывные на более высокие, при дополнительном - наоборот. Это приводит к тому, что в процессе преобразования возникает последовательность триграмм, следующих друг за другом.

Если триграмма составлена из линий одного типа, то она не изменяется при любом способе кодирования (триграммы цянь и кунь). Будем называть их базовыми. Триграммы чжень, гень, сюнь и дуй при одном из способов кодирования остаются без изменения, а при другом способе изменяются. Триграммы кань и ли во всех случаях трансформируются в другие триграммы.

Рассмотрим теперь квадратное расположение гексаграмм. Из первоисточников, дошедших до нас, известно три варианта такого расположения. Древнекитайские тексты свидетельствуют также, что этим исчерпывается их разнообразие. Это расположение по Фу-си, по Вэньвану и по мавандуйскому тексту, все они приведены в верхней части рис. 40. Под ними в таких же квадратах показаны линии, соединяющие соседние гексаграммы из каждых двух, объединенных в пары по отношению порядка.





**рис. 40** Варианты расположения гексаграмм

Уже то, что существует несколько квадратных расположений гексаграмм, говорит о том, что создателей системы ни одно из них не удовлетворило полностью. Так в расположении по Фу-си обозначена иерархия гексаграмм путем полярного размещения по углам квадрата основных гексаграмм (гексаграммы 1 и 2, 11 и 12), есть определенная система в размещении пар гексаграмм, связанных отношением порядка. В ней просматривается диагональный крест, симметрия, но все же оно усложнено. В расположении по Вэнь-вану достигается максимальное упрощение в изображении пар гексаграмм, связанных отношением порядка, но утеряна иерархия гексаграмм. В расположении по мавандуйскому тексту сделана попытка изобразить иерархию гексаграмм путем разделения квадрата на верхнюю и нижнюю половины, но не просматривается какая-либо система в расположении пар гексаграмм. Таким образом, только размещение по Фу-си является достаточно полным с точки зрения отражения свойств системы, однако, оказыва-

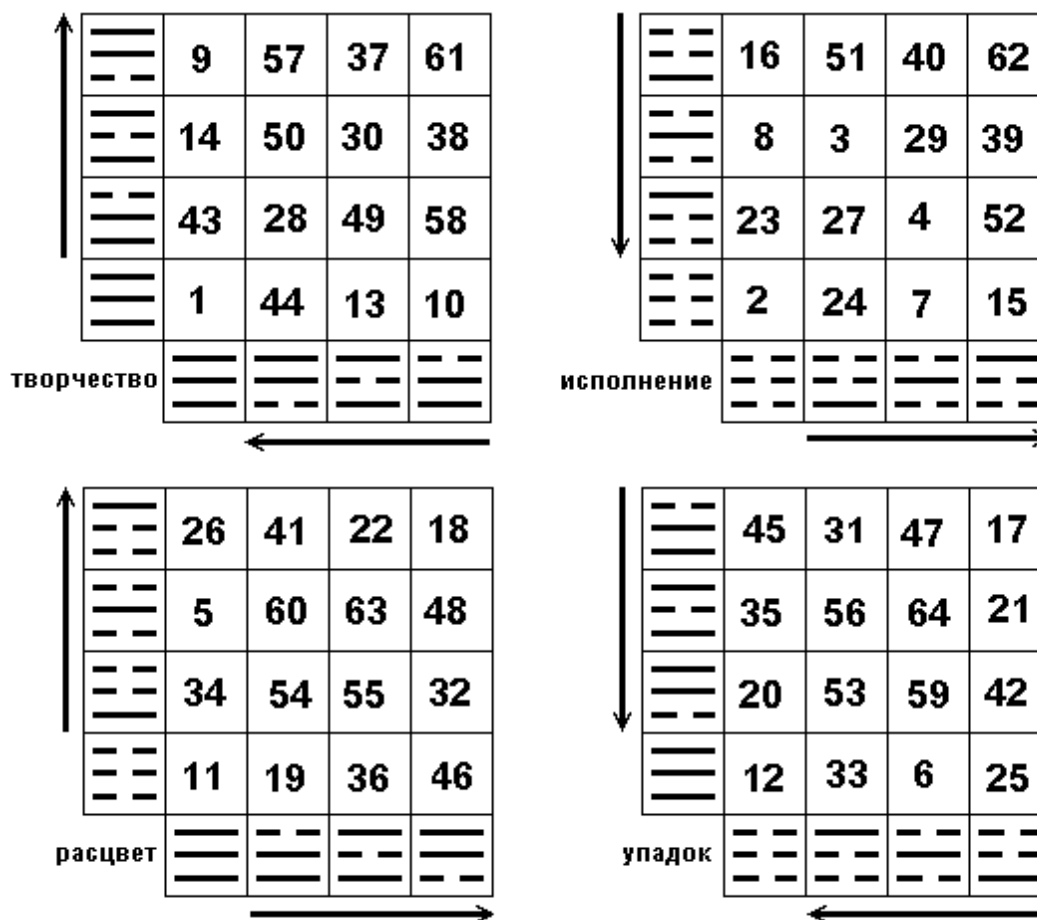
ется, что и в нем многое не учтено.

Итак, имеется две базовых триграммы: цянью и кунью. Будем использовать только основной способ кодирования. Возбуждение вносится в них путем замены одной из линий триграммы на противоположную линию. Тогда в рамках триграммы цянью наиболее неустойчивой, порождающей наиболее длинную последовательность триграмм при движении, будет триграмма дуй. Аналогичным образом, для триграммы кунью это будет триграмма чжень.

С учетом этого можно определить по две для каждой базовой триграммы, а всего четыре линейные последовательности триграмм, отличающиеся направлением распространения возбуждения, рис. 39. На рисунке направление распространения возбуждения показано стрелкой, идущей от наиболее неустойчивой возбужденной триграммы к устойчивой возбужденной триграмме. Эта стрелка изображена непосредственно над линейной последовательностью.

Используем полученные линейные последовательности триграмм парами и без повторов для формирования гексаграмм. Линейную последовательность, триграммы которой применяются в качестве верхней триграммы гексаграммы, будем располагать вертикально, линейную последовательность, триграммы которой применяются в качестве нижней триграммы гексаграммы будем располагать горизонтально. Тогда имеем четыре группы по шестнадцать гексаграмм, показанные на рис. 41.

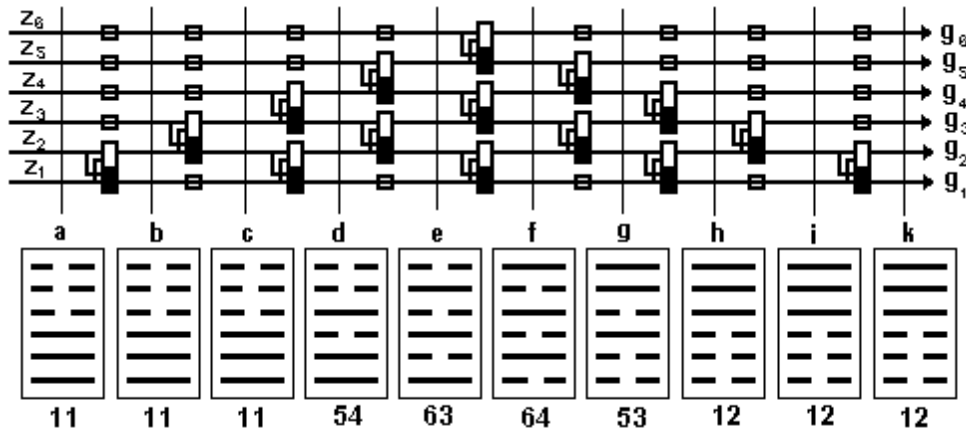
Гексаграмма, образованная из базовых триграмм, дает название группе. Перечислим их: это творчество, это исполнение, это расцвет и это упадок. Каждая группа объединяет родственные по составу гексаграммы, а базовая гексаграмма группы - это ее своеобразный полюс. На рисунке показаны также стрелки направлений возбуждения. Хорошо видно, что это четыре взаимоисключающие друг друга варианта, созвучные названиям групп гексаграмм.



**рис. 41 Группы гексаграмм**

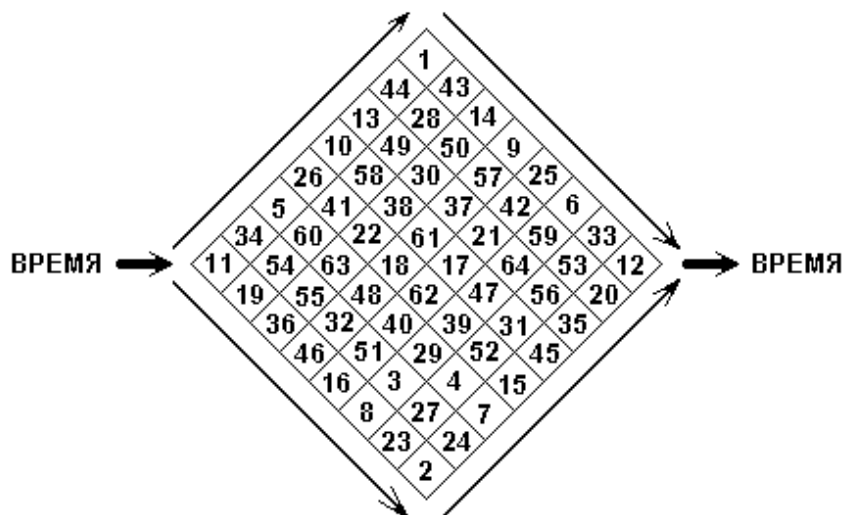
Рассмотрим гексаграммы групп с точки зрения их устойчивости и изменяемости при движении. Будем считать, что для них возможны два вида движения: когда прерванная черта перемещается сверху вниз и когда прерванная черта перемещается снизу вверх (естественно, что сплошная черта перемещается при этом в противоположном направлении). Это можно обеспечить по-разному, например, если применять то основной, то дополнительный способ кодирования, рис. 42. Тогда получим, что базовые гексаграммы 1 и 2 как системообразующие не подвержены изменениям при любом направлении движения. Гексаграммы 43,44 и 23,24, базовая гексаграмма 11 и гексаграммы 34,19, а также базовая гексаграмма 12 и гексаграммы 20,33 не подвержены изменениям в одном из направлений движения и изменяются

при другом. Это их важная особенность. Гексаграммы с указанным свойством как бы сосредоточены у полюсов групп. Все остальные гексаграммы групп изменяются как при одном, так и при другом направлении движения.



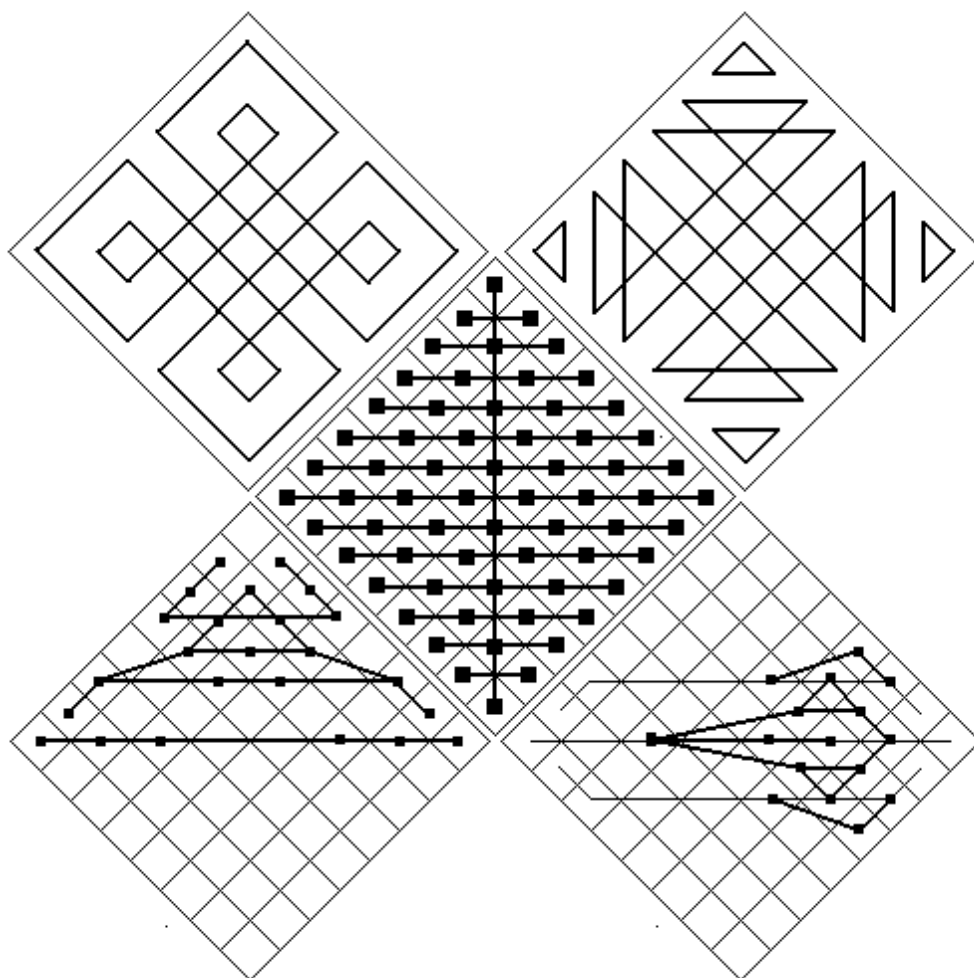
**рис. 42 Трансформация гексаграмм**

Полученные группы соединяются в систему. Порядок соединения определяется единым для всех групп процессом течения времени, задающего направления распространения возбуждения. Будем считать по европейской традиции, что течение времени происходит в направлении слева направо, рис. 43.



**рис. 43 Система гексаграмм**

Новое размещение является размещением с четырьмя полюсами: верхним - творчество, нижним - исполнение, левым – расцвет и правым - упадок. Схема линий, соединяющих гексаграммы, связанные отношением порядка, для новой системы приведена в центре рис. 44.



**рис. 44 Пары гексаграмм и траектории потоков перемен**

Схема линий упорядочена в горизонтальном направлении времени, т.е. согласована с ним. Таким образом, в системе с новым квадратным размещением гексаграмм, наряду с показом иерархии, реализована упорядоченная по времени схема линий.

Зададимся целью как-нибудь более наглядно представить размещение пар гексаграмм, чем это достигается в схеме линий. Это можно сделать разными способами, но наиболее наглядным и простым ока-

зывается способ на основе петлевой замкнутой кривой, показанной слева в верхней части рис. 44. Эта кривая интересна тем, что была, по-видимому, изобретена в те отдаленные времена, когда создавалась система «Книги Перемен». Еще один способ показан в верхней части того же рисунка справа.

Другая принципиальная особенность нового размещения связана с возможностью наблюдения потока перемен. Прежде чем проследить это, напомним хотя бы некоторые из известных пояснений этого термина. «Жизнь обретает форму в соответствии с тем, что дано природой. Поэтому ее законы считаются познаваемыми. .... Ситуации, отраженные в «И цзин», взяты непосредственно из жизни – это то, что случается со всеми изо дня в день и понятно всем, ... вратами в систему может быть лишь простота и ясность. ... Все мы от рождения находимся в едином потоке развития, но узнавание его и следование ему предполагает ответственность и свободный выбор». [36]

Итак, перемены бывают двух видов: естественные, связанные с природой вещей, обусловленные законами природы, и спонтанные, обусловленные выбором человека, но все же подчиняющиеся законам природы. В начале мы обсудим естественные перемены.

Мотив движения, его алгоритм позволяют определить все естественные потоки перемен. Для этого достаточно проследить с помощью алгоритма движения для каждой гексаграммы ее преобразования как в одном, так и в другом направлении движения. Имеем следующие две пары линейных последовательностей, общие для всех групп гексаграмм:

$$\left\{ \begin{array}{l} 34-5-38-37-6-33 \\ 33-6-37-38-5-34 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 19-36-40-39-35-20 \\ 20-35-39-40-36-19. \end{array} \right.$$

Для групп гексаграмм «расцвет» и «упадок» имеем одну общую пару линейных последовательностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} 11-54-63-64-53-12 \\ 12-53-64-63-54-11. \end{array} \right.$$

Далее приведем отдельно по группам гексаграмм соответствующие линейные последовательности. Для группы гексаграмм «творчество» имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 61-37 \\ 61-38 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 30-57-6 \\ 30-58-5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 28-50-57 \\ 28-49-58 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 44-13-10-9-14-43 \\ 43-14-9-10-13-44. \end{array} \right.$$

Для группы гексаграмм «исполнение» имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 62-39 \\ 62-40 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 29-52-35 \\ 29-51-36 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 27-4-52 \\ 27-3-51 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 23-8-16-15-7-24 \\ 24-7-15-16-8-23. \end{array} \right.$$

С другой стороны для группы гексаграмм «расцвет» получим следующие линейные последовательности:

$$\left\{ \begin{array}{l} 18-64 \\ 18-63 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 22-64 \\ 22-60-54 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 48-64 \\ 48-55-54 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 41-22 \\ 41-60 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 32-48 \\ 32-55 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 26-38 \\ 26-5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 46-40 \\ 46-36. \end{array} \right.$$

И, наконец, для группы гексаграмм «упадок» получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 17-64 \\ 17-63 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 21-59-53 \\ 21-63 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 47-56-53 \\ 47-63 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 42-59 \\ 42-21 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 31-56 \\ 31-47 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 25-6 \\ 25-37 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 45-35 \\ 45-39. \end{array} \right.$$

Последовательности гексаграмм показаны парами. Верхняя последовательность формируется при движении слева направо, а нижняя при движении в обратном направлении. На них легко прослеживается ориентация на использование гексаграмм с соседними номерами.

Естественные потоки перемен образуют своеобразные, но простые траектории движения. В большинстве случаев это циклы перемен, но не всегда. Для циклов перемен существуют две противоположные точки, которые задают пределы. Точки пределов это гексаграммы около полюсов, рассмотренные выше. Некоторые из траекторий показаны на рис. 44 в его нижней части. Слева показаны частично траектории общие для всех групп гексаграмм и траектории для группы гексаграмм «творчество». Справа – траектории для группы гексаграмм «упадок». Анализ показывает, что для траекторий существуют диагональные симметрии как относительно вертикальной, так и относительно горизонтальной диагонали. Линейные последовательности, расположенные симметрично, образуют пару родственных линейных последовательностей.

Что касается спонтанных перемен, то они, скорее всего, хаотичны, имеют смысл перескоков с одной траектории на другую и должны совершаться более редко. Спонтанные переменные составляют, безусловно, важную часть формирования потока перемен, так как, например, к гексаграммам 61, 26 или 42 вообще можно перейти только этим способом.

В заключение хотелось бы высказать предположение, что, по мере развития цивилизации, глубина дробления в системе должна возрастать, обнаруживая все более тонкие грани содержания и взаимодействия в окружающей действительности.



## Глава 6. ПРИМЕРЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

### 6.1. Линейные интервальные фильтры

Рассмотрим примеры технической реализации различных интервальных систем и использование их для решения технических задач.

Сортирующее устройство. В математических моделях линейной теории интервальных систем важное значение отводится формуле для совокупности ЭСФ

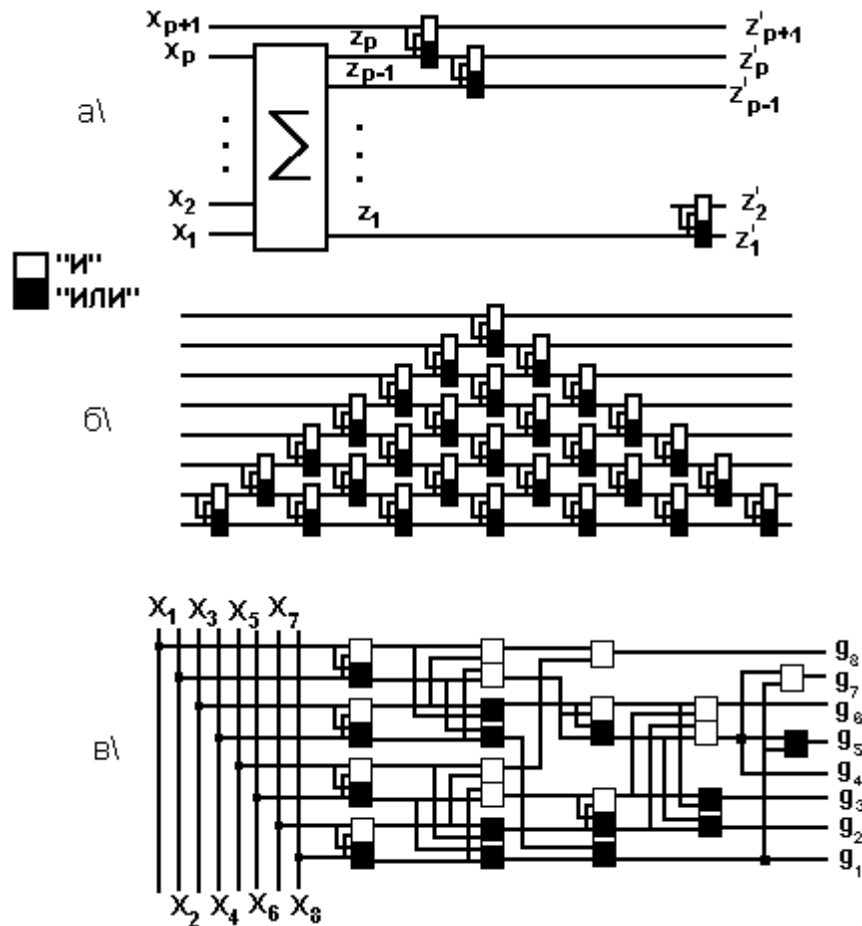
$$\bigcup_{i=1,2,\dots,n}^i (x_1 \& x_2 \& x_3 \& \dots).$$

Эта совокупность описывает процесс сортировки симплексов, который может применяться как для восстановления формы, так и для сложения сигналов. При синтезе сортирующего устройства можно выбрать один из нескольких эквивалентных способов реализации этого алгоритма. Рассмотрим способ, включающий рекурсию.

Пусть имеется сортирующее устройство на  $p$  входов  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$  и на  $p$  выходов  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_p$ . Добавим еще вход  $x_{p+1}$ , тогда новые значения выходов  $z'_i$  сортирующего устройства определяются выражениями:

$$\begin{aligned} z'_{p+1} &= x_{p+1} \& z_p \\ z'_p &= (x_{p+1} \vee z_p) \& z_{p-1} \\ z'_{p-1} &= [(x_{p+1} \vee z_p) \vee z_{p-1}] \& z_{p-2} \\ &\dots \\ z'_1 &= x_{p+1} \vee z_p \vee z_{p-1} \vee \dots \vee z_1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Легко проверить, что новые значения являются логическими функциями совокупности ЭСФ для  $(p+1)$  переменной, рис. 45а.



**рис. 45 Сортирующее устройство (сумматор) и схемы его реализации: а) устройство; б) схема на спаренных элементах; в) схема на произвольных парах**

Этот способ удобен для получения схемы сортирующего устройства в случае применения для реализации алгоритма двухвходовых спаренных элементов "И" и "ИЛИ", соответствующая схема показана на рис. 45б [37]. Число элементов устройства  $L(p)$ , характеризующее сложность устройства, можно определить по формуле  $L(p) = p(p - 1)$ .

Рассмотрим работу сортирующего устройства. Пусть на входы сортирующего устройства поступает некоторый набор импульсов разной длительности. Устройство обеспечивает непрерывное вычисление

максимумов и минимумов во всех точках логического связывания входных шин между собой, благодаря этому все импульсы на выходах устройства выстраиваются упорядоченно по шинам квантования в соответствии с величиной длительности импульса. Согласно логике работы устройства на самом нижнем уровне действует импульс с наибольшей длительностью, на втором уровне снизу с меньшей длительностью и т.д.

Сортирующее устройство можно получить и другим способом: путем одновременных логических преобразований пар сигналов на уровнях квантования в соответствии с логическими уравнениями совокупности ЭСФ. Этот способ также позволяет синтезировать устройство в базисе двухвходовых элементов "И" и "ИЛИ", его схема приведена на рис. 45в. Сложность устройства здесь оказывается равной  $L(p) = p(p-1)/2$ , т.е. в два раза меньше, чем в первом случае.

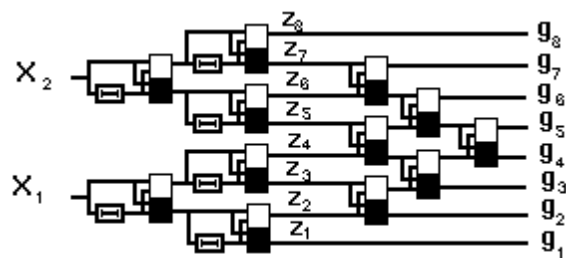
Если имеется два квантованных сигнала, и импульсы уровней квантования одного сигнала поступают на одни входы сортирующего устройства, а второго сигнала - на другие входы сортирующего устройства, то на выходе сортирующего устройства образуется в квантованном виде сложенный сигнал от этих входных сигналов.

Устройство интервального накапливающего фильтра для квантованной области амплитуд (ИФК). Это устройство возникает в связи с условием теоремы 3.2, и в сокращенном виде было описано ранее. Сделаем это теперь более подробно. Утверждение теоремы 3.2 описывает алгоритм фильтрации, который включает первую быструю часть и вторую медленную часть, связанную с сортировкой импульсов по длительности. Соответствующая схема устройства интервального накапливающего фильтра для квантованной области амплитуд приведена на рис. 9 (стр. 57). Быстрая часть образует ступень фильтрации. Число ступеней фильтрации может быть произвольным. Чем больше ступеней фильтрации  $k$ , тем больше избирательность фильтра.

Ступень фильтрации может быть реализована в базисе двухвхо-

довых логических элементов "И" и "ИЛИ", обеспечивающих вычисление максимумов и минимумов между симплексами входного сигнала и задержанного входного сигнала для каждого уровня квантования отдельно. Благодаря этому, количество выходных шин после каждой ступени фильтрации увеличивается вдвое. Вторая часть фильтра - это сортирующее устройство, обеспечивающее формирование выходного квантованного сигнала.

ИФК работает следующим образом. Пусть на вход ИФК поступает периодический сигнал в квантованном виде. Импульсы на каждом уровне квантования задерживаются на длительность периода резонансной частоты фильтра и объединяются с помощью логических операций "И" и "ИЛИ". Это приводит к сокращению длины и расширению импульсов. В некоторых случаях сокращение длины может быть до нуля, а расширение до единицы, что в одинаковой степени приводит к потере сигнала. В целом же в фильтре изменяется число уровней, занимаемых сигналом, причем для центральной частоты  $\nu_0$  происходит увеличение числа уровней в два раза после каждой ступени фильтрации, что является наибольшим по сравнению со всеми другими частотами.



**рис. 46. Схема сортирующего устройства для частично упорядоченных сигналов**

Из-за логических операций расширения и сокращения длины импульсов после одной или нескольких ступеней фильтрации теряется их исходная упорядоченность, обусловленная формой входного сигнала. Эту упорядоченность восстанавливает сортирующее устройство,

включенное на выходе фильтра.

Нельзя сказать, что после ступеней фильтрации порядок нарушен полностью, поскольку сохраняется упорядоченность пар. Эта особенность позволяет упростить сортирующую часть фильтра до схемы, обеспечивающей сортировку только на стыке пар, рис. 46.

Сложность этого устройства, естественно, наименьшая  $L(p) = p(p-1)/4$ .

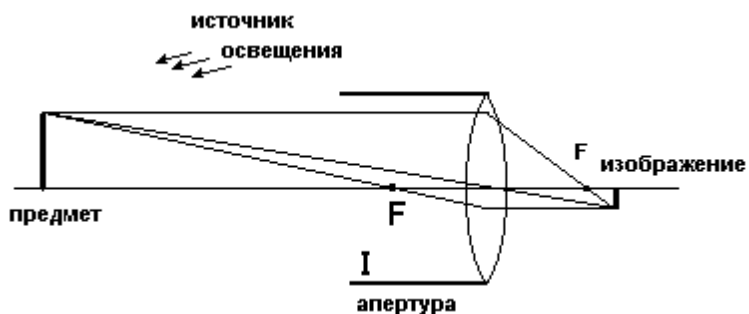
Кроме уже рассмотренных выше вариантов, возможны и другие модификации устройства ИФК.

Гребенчатый характер частотной характеристики любого накопителя приводит к тому, что в случае как ИФН так и ИФК при частоте сигнала равной  $\nu_0$  этот сигнал передается на выход без изменения независимо от своей формы. ИФН и ИФК являются фильтрами с низкой добротностью. Можно считать, что здесь

$$Q = \frac{k}{2}. \quad (6.2)$$

## 6.2. Электронная линза

Аналитические методы времениподобной теории представления и сопутствующие ей технические устройства эффективны для случаев обработки асимметричных по своему характеру объектов.



**рис. 47. Принцип получения изображения**

Примером такого объекта является изображение как таковое и в том числе то, которое образуется в результате функционирования лю-

бой системы видения. Общая схема формирования изображения показана на рис. 47.

Когда свет падает на предмет, то происходит его модуляция. Модуляция заключается в уменьшении яркости и в сокращении числа частот в совокупном спектре падающих световых частот. Это приводит к образованию сигнала цвета предмета с определенной яркостью, отвечающей каждой точке предмета. Каждая точка предмета становится тем самым источником излучения, распространяющегося в виде сферы в пространстве. Линза - это линейный фильтр, работающий на принципе накопления. Из части пространства  $I$ , выделяемого апертурой, все световые лучи от одной точки предмета собираются в одной точке (складываются). То же самое имеет место для всех других точек предмета. В соответствии с принципом суперпозиции их образование может рассматриваться независимо друг от друга. Совокупность точек, как результатов сложения световых лучей каждая, образует изображение предмета.

Изображение является асимметричным объектом, так как яркость в точках, составляющих изображение, не имеет обратных или противоположных значений. В связи с этим здесь предпочтительны методы и средства времениподобного представления, рассматривающего накопление как логическую процедуру. В соответствии с теорией это должно дать эффект главным образом при использовании в условиях квантования.

В целом ряде работ различных исследователей показано, что аналогом оптической системы в области квантованных сигналов является система с кодированной апертурой [38].

Такая система содержит два блока: блок формирования тени и блок восстановления изображения. Физически первый блок формирования тени состоит из кодирующей апертуры и из расположенной от нее на некотором расстоянии матрицы детекторов (например, фотоумножителей), чувствительных к поступающему на вход излучению.

Кодирующая апертура представляет непрозрачный для излучения экран с набором миниатюрных отверстий, размещенных по поверхности экрана по случайному закону.

В первом блоке обеспечивается создание и регистрация тени от изображения, формируемой апертурой под воздействием излучения, исходящего от предмета. Во втором блоке восстановления изображения осуществляется преобразование зарегистрированной тени от изображения цифровыми методами с целью восстановления изображения реального предмета. В качестве второго блока обычно используется компьютер. Для связи блоков информация от детекторов по шине связи передается в компьютер.

Для анализа двумерный предмет  $U$  представляют в виде изотропных пикселей  $U(i,j)$ , тень  $F$  как матрицу пикселей  $F(k,l)$  и кодированную апертуру как матрицу пропускания  $A(k,l)$ . Если в кодированной апертуре элемент с координатами  $(k,l)$  - это отверстие, то  $A(k,l)=1$ , если наоборот -  $A(k,l)=0$ .

В рамках классического представления образование тени определяется как умножение матрицы пикселей изображения на матрицу, описывающую кодированную апертуру, обеспечивающих

$$F(k,l) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} U(i,j) A(k+i,l+j) + V(k,l), \quad (6.3)$$

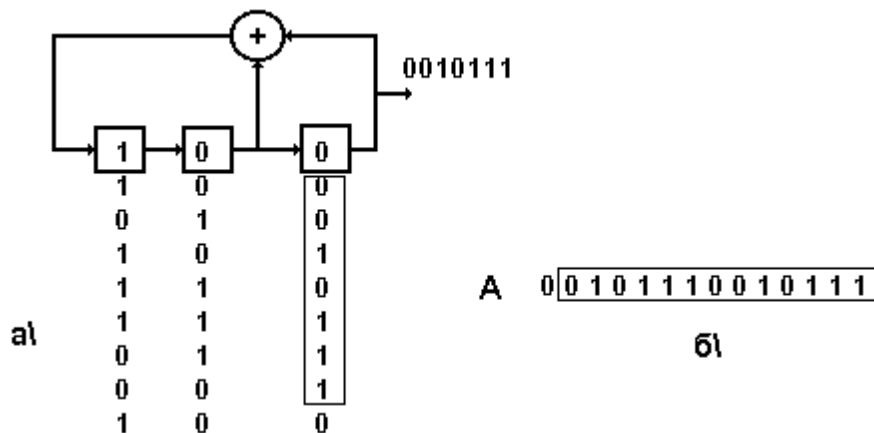
где  $V(k,l)$  - матрица, характеризующая шум.

Математический аппарат классического представления в силу своей симметрии располагает исключительно симметричными математическими средствами. В данном случае это матрицы и обратные им матрицы. Как известно свертка матрицы с обратной матрицей есть  $\delta$ - функция. Поэтому в рамках классического представления восстановление изображения осуществляется путем вычисления свертки с обратной матрицей  $G$  для матрицы  $A$ , что записывается как

$$U' = F * G = U + V * G, \quad (6.4)$$

где  $*$  - обозначает свертку.

Данный способ восстановления характеризуется тем, что при его осуществлении необходимо выполнить большое число умножений и сложений. Умножение является длительной операцией, требующей, чтобы сомножители присутствовали на входе умножителя без изменения своих значений до тех пор, пока не закончится умножение. Сложение также является длительной операцией, что связано со временем распространения сигнала переноса. По этим причинам вычисление свертки в принципе является весьма длительным процессом и не может быть обеспечено при непрерывном изменении входных величин, т.е. при непрерывном перемещении предмета.



**рис. 48. Построение одномерной кодированной апертуры: а) схема сдвигового регистра б) кодированная апертура (слева отбрасываемый элемент)**

Далее для простоты рассмотрим одномерный случай. Обычно для построения кодирующей апертуры используют порождающие полиномы. Возьмем полином третьей степени

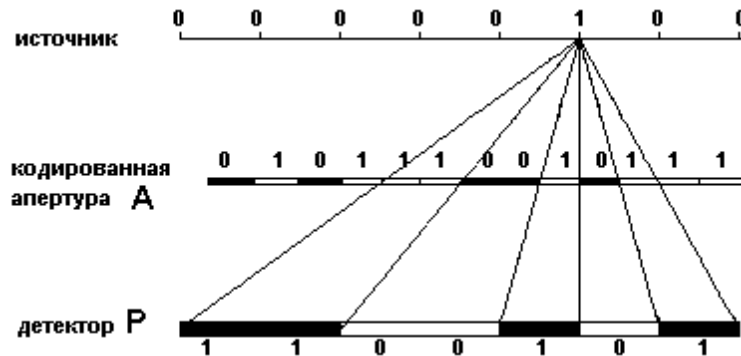
$$\theta(x) = x^3 + x + 1. \quad (6.5)$$

Тогда период псевдослучайной последовательности  $m = 2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$ . Схема сдвигового регистра для образования полинома третьей степени по (6.5) приведена на рис. 48а.

Если детектор  $P$  содержит  $i$  элементов, то кодированная апертура имеет  $(2i-1)$  элементов. Поэтому кодированная апертура  $A$  может быть



получена из полинома третьей степени путем отбрасыванием левого элемента так, как это показано на рис. 48б. Соответствующий этому случаю кодированной апертуры пример формирования тени от точечного источника показан на рис. 49.



**рис. 49. Схема формирования тени от точечного источника**

Кодированная апертура представлена здесь в виде чередующихся перемычек и отверстий, обеспечивающих случайный закон пропуска.

Выполним вычисления по восстановлению источника. Кодированной апертуре А: 0101110010111 соответствует обратная матрица G: -11-1111-1-11-1111. Элементы позиционно чувствительного детектора Р будут засвечены следующим образом Р :1100101. Восстановление осуществляется по формуле

$$F_i = \sum_{k=0}^{m-1} P(k) * G(i+k). \quad (6.6)$$

Соответствующие вычисления дают:

$$i=0 \quad F(0)=P(0) \times G(0)+ P(1) \times G(1)+ \dots + P(6) \times G(6)=-1+1-0+0+1+0-1=0$$

$$i=1 \quad F(1)=P(0) \times G(1)+ \dots + P(6) \times G(7)= 1-1+0+0+1-0-1=0$$

$$i=2 \quad F(2)=P(0) \times G(2)+ \dots + P(6) \times G(8)= -1+1+0+0-1-0+1=0$$

$$i=3 \quad F(3)=P(0) \times G(3)+ \dots + P(6) \times G(9)= 1+1+0-0-1+0-1=0$$

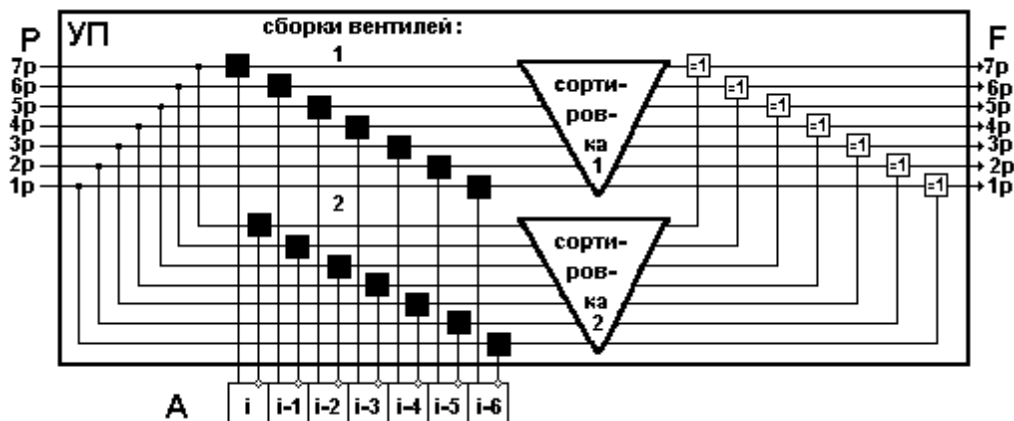
$$i=4 \quad F(4)=P(0) \times G(4)+ \dots + P(6) \times G(10)= 1+1-0-0+1-0+1=4$$

$$i=5 \quad F(5)=P(0) \times G(5)+ \dots + P(6) \times G(11)= 1-1-0+0-1+0+1=0$$

$$i=6 \quad F(6)=P(0) \times G(6)+ \dots + P(6) \times G(12)=-1-1+0-0+1+0+1=0.$$

В результате имеем F: 0000400.

Альтернативным образом можно считать, что возбуждение детектора является результатом логической операции между сигналом от источника и кодированной апертурой Соответствующая интервальная схема устройства преобразования интервалов (УП) показана на рис. 50, а весь блок восстановления изображения – на рис. 51.



**рис. 50** Блок-схема устройства преобразования

Разряды регистра А подключены к вентилям сборки 1 УП непосредственно, а к вентилям сборки 2 с помощью инверсных выходов.

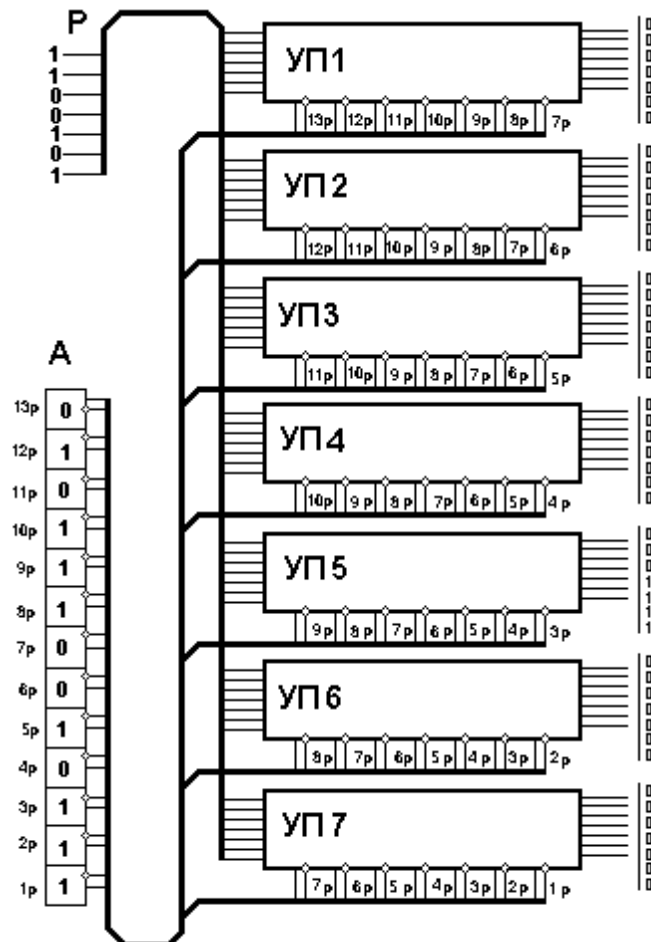
В зависимости от значения этих разрядов происходит пропускание или не пропускание интервалов, закодированных единицей, от детекторов Р на входы устройств сортировки, реализованных по схеме рис. 51(стр. 155). В устройстве сортировки единицы смещаются в одну сторону (например, в сторону младших разрядов или вниз).

Одноименные выходы устройств сортировки сравниваются попарно с помощью схемы "Исключительное ИЛИ", выходы которых образуют результат преобразования в УП.

Блок восстановления сконструирован на основе семи УП по числу элементов изображения в детекторе Р. Элементы позиционно - чувствительного детектора Р параллельно подключены ко всем УП. Разряды регистра А, в котором хранится двоичный код кодирования апертуры, подключен к отдельным УП со смещением на один разряд, начи-

ная со старшего разряда.

На вход блока восстановления сигнал тени поступает в виде совокупности интервалов, длительность которых определяется перемещением предмета. Мысленно поместим глаз в какую-нибудь точку на линии источников излучения, помеченную цифрой ноль, т.е. где нет предмета. При этом удастся увидеть часть засвеченных детекторов. Также мысленно заменим кодированную апертуру на апертуру с дополнительным законом кодирования, в которой переключки заменены на отверстия, а отверстия на переключки. Теперь удастся увидеть какие-то другие из засвеченных детекторов. Благодаря случайному закону распределения отверстий и переключек количество единиц и нулей детектора Р в обоих случаях будет одинаковым, хотя расположены они будут по разному.



**рис. 51** Блок-схема блока восстановления

В связи с этим число единиц, проходящих через сборки вентиляей 1 и 2 на входы устройств сортировки некоторого УП, будет одним и тем же, так как не будет зависеть от того, используется ли прямое или инверсное значение кода А. Это повлияет только на распределение единиц по входным шинам устройств сортировки, а не на их количество. После упаковки в сторону младших разрядов в устройствах сортировки их количество в обоих случаях оказывается одинаковым, что приводит к образованию кода из всех нулей на выходах УП.

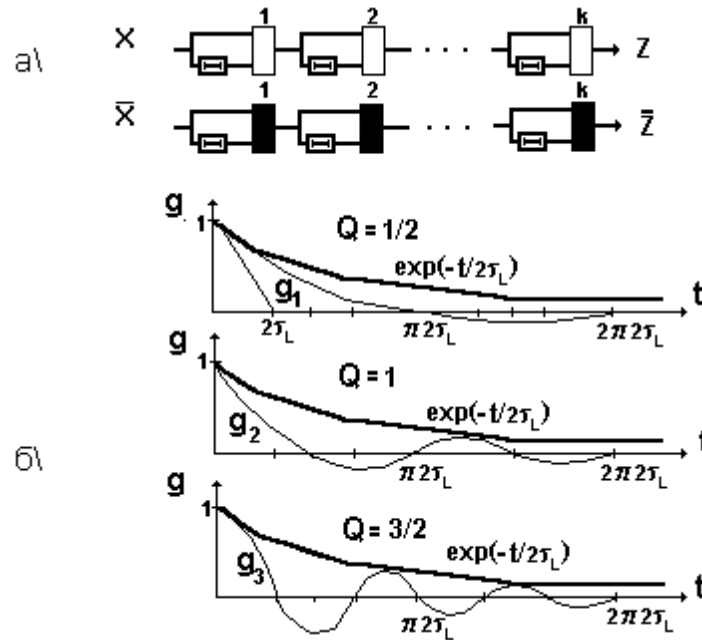
Так будут функционировать все УП, кроме пятого. Чтобы объяснить его работу, мысленно поместим глаз в точку размещения предмета, помеченную цифрой единица. Можно увидеть из этого положения все засвеченные детекторы. При переходе на апертуру, кодированную дополнительным образом, все засвеченные детекторы окажутся закрытыми от наблюдателя. Поэтому на входе верхнего устройства сортировки имеем распределение единиц 1100101, а, следовательно, на выходе 0001111. На входе нижнего устройства сортировки имеем 0000000, и на выходе 0000000. В результате на выходе УП с номером пять будет 0001111 (четыре в позиционном коде), что совпадает с результатом блока обработки, работающего по классическому способу, позволяя обнаружить излучающий предмет.

Благодаря отсутствию умножителей и сумматоров в обычном смысле, вычисления в блоке восстановления осуществляются без использования сигналов переноса. Тем самым этот блок может функционировать в режиме непрерывного поступления сигналов от детекторов, т.е. в реальном времени. Этот способ обеспечивает возможность создания нового класса устройств - электронных линз для практически любых излучений.

### **6.3. Интервальные фильтры для импульсов**

Устройство линейного интервального фильтра для импульсов (ИФИ).

Схема ИФИ показана на рис. 52.



**рис. 52 Интервальный фильтр для периодической последовательности импульсов (ИФИ): а) схема б) переходный процесс в колебательном контуре при разной величине добротности  $Q$**

Фильтр обеспечивает селекцию одиночных последовательностей импульсов или разделение двух последовательностей импульсов, объединенных в одну последовательность с помощью логической операции, если одна из них является центральной последовательностью для данного фильтра.

Фильтр выделяет также одну последовательность из логической комбинации, содержащей три последовательности импульсов, если их частоты соотносятся друг с другом как числа в одной из троек чисел (4,6,7), (5,6,8), (6,8,9).

Схема ИФИ может быть собрана либо по схеме основной системы либо по схеме дополняющей системы. Цепочка для основной системы содержит  $k$  последовательно включенных устройств логического дифференцирования. Цепочка для дополняющей системы содержит  $k$  последовательно включенных устройств логического интегрирования. На основную систему поступает последовательность, образованная логи-

ческим объединением составляющих последовательностей импульсов, а на дополнительную - логическим совпадением дополнительных последовательностей по отношению к исходным последовательностям импульсов.

Физически селекция и фильтрация обеспечиваются в ИФИ путем накопления и подстановки импульсов в соответствии с частотной характеристикой на рис. 29 (стр. 96). Число каскадов дифференцирования, необходимое для подавления последовательности импульсов с числом импульсов  $(m-s)$  на интервале  $mT_0$ , где  $s = 1, 2, 3, \dots, m/2$ , можно определить следующим образом. Подставим в выражение для частоты, которая не передается на выход  $v = \frac{2k-1}{2k} v_0$ , вместо  $v$  и  $v_0$  пропорциональные им величины  $(m-s)$  и  $m$ . После преобразования имеем  $k = m/2s$ . В качестве конкретного значения для  $k$  необходимо выбирать ближайшее большее целое от значения, полученного по формуле, если оно отличается от целого.

Пусть на вход цепочки из  $k$  устройств ИФИ поступает пачка импульсов и пусть пачка начинается с нулевого уровня, а заканчивается единичным уровнем, тогда переходный процесс ИФИ состоит в том, что в начале происходит задержка на  $k$  периодов до появления выходного сигнала, а в конце пачки импульсов формируется  $k$  дополнительных импульсов.

В ИФИ некоторым образом происходит раскачка, приводящая к задержке появления выходного сигнала, а по окончании входного сигнала происходит подстановка колебаний.

Также как в случае частотной характеристики, здесь существует непосредственная связь работы ИФИ с работой в переходном режиме резонансной системы. Переходной процесс в резонансной системе заключается в том, что в процессе раскачки амплитуда нарастает по экспоненте, а после выключения входного сигнала убывает тоже по экспоненте. И то и другое теоретически продолжается бесконечно долго по времени. Колебательный переходной процесс описывается уравне-

нием

$$g = g_0 \exp(-t/2\tau_L) \exp(\pm i\omega t), \quad (6.7)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{1}{\tau_L \tau_C} - \frac{1}{4\tau_L^2}}, \tau_L = L/R, \tau_C = RC.$$

Добротность резонансной системы равна  $Q = \omega\tau_L$ . Случай  $Q = 1/2$  является начальной точкой образования колебательного процесса. Теоретически сразу скачком в резонансной системе устанавливается процесс с бесконечным числом колебаний [20].

Если мысленно ввести пороги чувствительности, ограничивающие время переходного процесса, то в качестве естественного приближения этот случай сводится к случаю задержки и подстановки одного колебания, обеспечиваемого одним каскадом устройства ИФИ. Для  $Q = 1/2$  на выходе резонансной системы имеем

$$\omega = Q/\tau_L = 1/2\tau_L \text{ и} \\ g = g_0 \exp[(-1 \pm i)t/2\tau_L] \quad (6.8)$$

с периодом колебания  $T = 2\pi 2\tau_L$ .

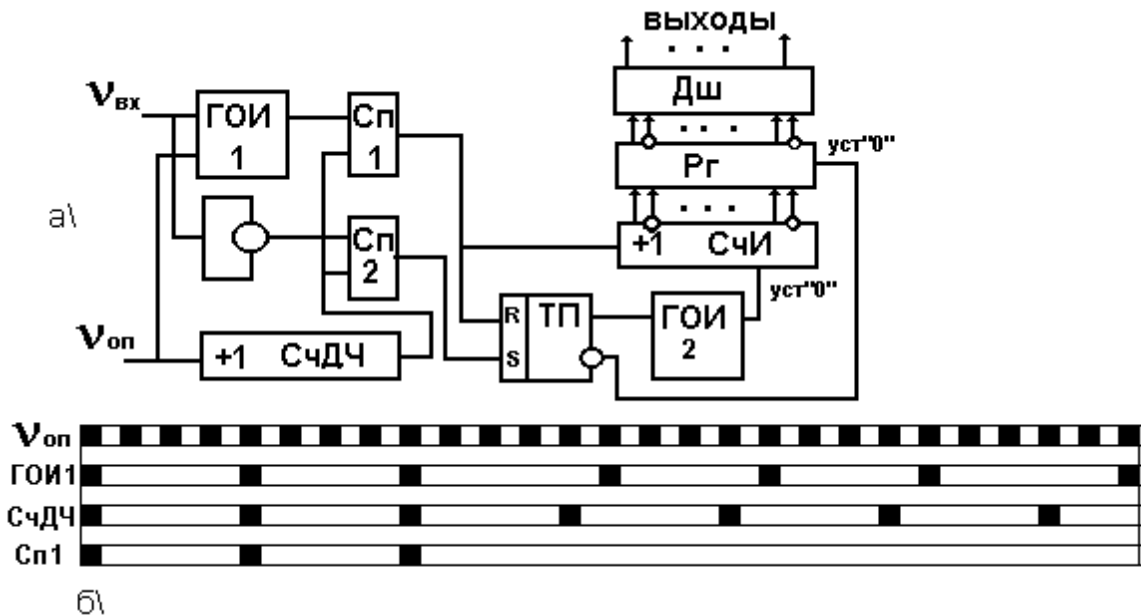
При присвоении  $Q$  значений  $1/2, 1, 3/2, \dots$  имеем колебания, приближения для которых являются цепочки ИФИ с числом устройств  $k = 2Q$ .

Устройство демодулятора. Примером более сложной интервальной системы для импульсов является устройство демодулятора частотно-модулированных сигналов, показанное на рис. 53а.

Это устройство содержит как линейные, так и нелинейные части [39]. На вход демодулятора поступает ЧМ сигнал в виде последовательности модулированных по частоте импульсов, следующих с переменной частотой  $\nu_{\text{ВХ}}$ . При отсутствии модуляции частота  $\nu_{\text{ВХ}}$  равна частоте несущей  $\nu_{\text{Н}}$ .

Демодулятор содержит генератор опорной частоты, вырабаты-

вающий импульсы с постоянной частотой  $\nu_{оп}$ . Эти импульсы используются в демодуляторе в качестве стандарта при формировании выходных сигналов отдельных блоков устройства и для синхронизации.



**рис. 53 Блок-схема ЧМ демодулятора и временная диаграмма формирования пачки импульсов**

Частота импульсов  $\nu_{оп}$  снижается с помощью счетчика деления частоты СчДЧ до величины  $\nu_{ц} = \nu_{оп} / n$ , близкой к частоте последовательности импульсов входного сигнала  $\nu_{н}$ , но отличающейся от нее на величину разностной частоты  $\nu_{р}$ . В качестве выхода в СчДЧ используется сигнал переноса в старший разряд, поэтому на выходе СчДЧ формируется последовательность узких импульсов стандартной формы (не меандр). Пусть в последовательности стандартных по форме импульсов на выходе СчДЧ на интервале периода разностной частоты содержится ровно  $N_1$  импульсов.

Частота  $\nu_{оп}$  выбирается так, чтобы  $\nu_{р} \gg \max | \nu_{вх} - \nu_{н} |$ . В принци-



пе это можно обеспечить, если установить частоту  $\nu_{\text{Ц}}$  больше частоты  $\nu_{\text{ВХ}}$  или если установить частоту  $\nu_{\text{Ц}}$  меньше частоты  $\nu_{\text{ВХ}}$ . Возьмем, например, случай, когда  $\nu_{\text{Ц}}$  меньше частоты  $\nu_{\text{ВХ}}$ .

Схема синхронизации в виде первого генератора одиночного импульса ГОИ1 обеспечивает переход от плавного изменения частоты входного ЧМ сигнала к скачкообразному изменению частоты. Обеспечивается это следующим образом. На выходе ГОИ1 формируется последовательность импульсов с постоянной величиной периода  $T_{\text{Ц}}$ , но с той особенностью, что время от времени происходит скачкообразное увеличение одного или нескольких периодов, что и позволяет отслеживать значение входной частоты с определенной дискретностью. Пусть число импульсов в этой последовательности на интервале периода разностной частоты  $\nu_{\text{р}}$  равно  $N_2$ .

При изменении частоты  $\nu_{\text{ВХ}}$  под воздействием модуляции изменяется разностная частота  $\nu_{\text{р}}$  и изменяются числа  $N_1$  и  $N_2$  для этих двух последовательностей импульсов на периоде разностной частоты. Для решения задачи демодуляции из этих двух последовательностей импульсов формируется линейная комбинация в виде последовательности импульсов на выходе элемента совпадения Сп1, которая представляет собой пачки импульсов стандартной формы. Эти пачки импульсов повторяются с частотой  $\nu_{\text{р}}$ , при этом число импульсов в пачке все время пропорционально величине  $\nu_{\text{р}}$ , рис. 53б.

Рассмотренная часть устройства демодулятора представляет собой линейную часть схемы устройства. Остальная часть устройства - это нелинейная часть, предназначенная для измерения величины  $\nu_{\text{р}}$ .

Измерение величины  $\nu_p$  осуществляется путем подсчета числа импульсов в пачке в счетчике импульсов СЧИ. Для этого первый импульс в пачке импульсов на выходе элемента Сп1 переключает триггер пачки ТП в единичное состояние. Из импульса на выходе триггера пачки ТП вырабатывается одиночный импульс стандартной формы с помощью генератора одиночного импульса ГОИ2, который обеспечивает сброс в ноль счетчика импульсов СЧИ. Затем осуществляется подсчет числа импульсов в пачке импульсов.

По окончании подсчета, код числа импульсов передается из счетчика импульсов СЧИ в регистр Рг. Для этого используется инверсный выход триггера пачки ТП. Сам триггер переключается в нулевое состояние сигналом с выхода элемента совпадения Сп2 приблизительно через время, равное половине периода разностной частоты от момента начала формирования пачки импульсов на выходе элемента Сп1. Это обеспечивается тем, что на вход элемента Сп2 подключена входная последовательность импульсов через инвертор.

Удобно подобрать частоту  $\nu_{оп}$  опорного генератора так, чтобы при поступлении на вход частоты  $\nu_{вх} = \nu_n$  в счетчике импульсов СЧИ устанавливался код 1000..0 с единицей в старшем разряде. При отклонении частоты  $\nu_{вх}$  в большую или меньшую сторону от частоты несущей за счет модуляции код в счетчике импульсов СЧИ также будет изменяться относительно выбранного начального значения то в большую, то в меньшую сторону. При этом старший разряд регистра Рг будет переключаться с частотой периода модулирующей частоты, и тем самым обеспечивается выделение периода модулирующей частоты из входного модулированного ЧМ сигнала.

Более тонкие детали формы модулирующего сигнала обеспечивают переключение других разрядов регистра Рг, поэтому путем дешифрации кода в регистре можно сформировать импульсы, длитель-

ность которых соответствует длительности интервалов на разных уровнях квантования для модулирующего сигнала. Арифметическое сложение этих импульсов образует квантованную область, отвечающую модулирующему сигналу.

Определим чувствительность демодулятора к изменению входной частоты. Пусть задана входная частота  $\nu_{\text{вх1}}$ , тогда

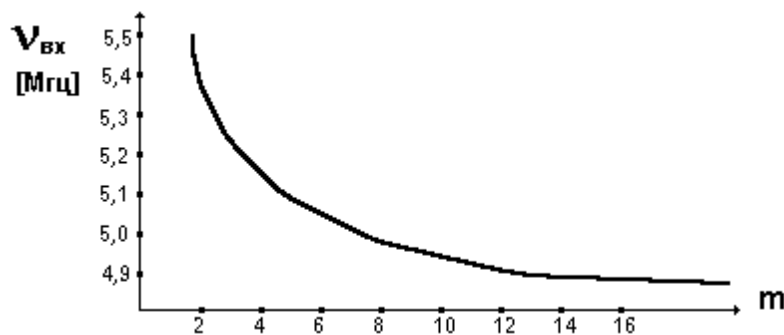
$$\nu_{\text{p1}} = \nu_{\text{вх1}} - \nu_{\text{оп}}/n. \quad (6.9)$$

Начнем менять входную частоту, например, будем ее увеличивать. Для того, чтобы это увеличение привело к изменению разностной частоты, вырабатываемой в устройстве, необходимо, чтобы оно обеспечивало увеличение периода разностной частоты на величину одного периода опорной частоты  $\nu_{\text{оп}}$ , т.е. обеспечивало

$$\nu_{\text{p2}} = \frac{1}{1/\nu_{\text{p1}} - 1/\nu_{\text{оп}}} = \nu_{\text{p1}} \nu_{\text{оп}} / (\nu_{\text{оп}} - \nu_{\text{p1}}). \quad (6.10)$$

Отсюда, минимальное различимое изменение разностной частоты равно

$$\Delta \nu_{\text{p}} = \nu_{\text{p2}} - \nu_{\text{p1}} = \nu_{\text{p1}} \nu_{\text{оп}} / (\nu_{\text{оп}} - \nu_{\text{p1}}) - \nu_{\text{p1}} = \nu_{\text{p1}}^2 / (\nu_{\text{оп}} - \nu_{\text{p1}}). \quad (6.11)$$



**рис. 54** График изменения числа  $m$  импульсов в пачке импульсов при  $\nu_{\text{оп}}/n=4.8$  МГц

Поскольку  $\nu_{\text{оп}} \gg \nu_{\text{p}}$ , то имеем  $\Delta \nu_{\text{p}} = \nu_{\text{p1}}^2 / \nu_{\text{оп}}$ . Следовательно, чув-

ствительность демодулятора будет зависеть от величины отклонения входной частоты  $\nu_{\text{ВХ}}$  от частоты  $\nu_{\text{ОП}}/n$  и тем меньше, чем больше это отклонение.

На рис. 54 приведен график изменения числа импульсов  $m$  в пачке в зависимости от изменения входной частоты  $\nu_{\text{ВХ}}$ . Из него следует, что в общем случае число импульсов в пачке импульсов связано с  $\nu_{\text{ВХ}}$  нелинейной зависимостью. Для практических целей, когда это необходимо, на этом графике можно выбрать линейный участок.

Величина отклонения частоты несущей от центральной меняется по закону изменения амплитуды модулирующей частоты. Код в счетчике импульсов СЧИ также пропорционален этому отклонению. Поэтому величина отклонения и длительность этого отклонения по времени могут быть определены путем дешифрации кода регистра. Дешифратор при этом выполняет задачу преобразования кода в позиционный код. Условно разделим все выходы дешифратора на две группы, что соответствует отклонению в большую или меньшую сторону от частоты несущей. В течение одного периода модулирующей частоты подсчет числа импульсов в пачке и, соответственно, опрос счетчика импульсов СЧИ производится многократно (это обеспечивается соответствующим выбором разностной частоты  $\nu_p$ , которая должна быть, по крайней мере, в несколько раз больше модулирующей частоты). Таким образом, по мере изменения амплитуды модулирующей частоты, или отклонения входной частоты от частоты несущей, изменяется количество возбужденных выходов дешифратора. Если мысленно подключить выходы дешифратора к сумматору, то на его выходе будет формироваться ступенчатый сигнал, являющийся аппроксимацией сигнала модулирующей частоты.

Однако в этом нет необходимости. Дешифратор в этом устройстве формирует позиционный код, разряды которого можно непосредствен-

но использовать для управления излучателями звуковых колебаний (динамиками).

Например, в случае трехразрядного регистра  $R_3$  выходы дешифратора описываются следующими логическими уравнениями:

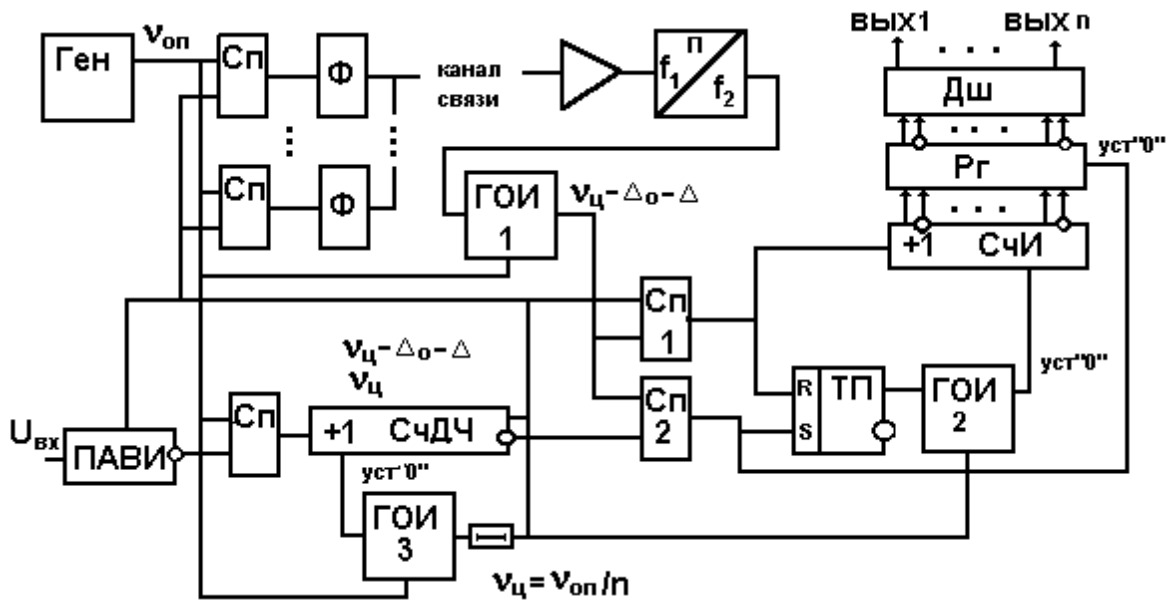
$$\begin{aligned}
 \text{Вых 1} &= x \& y \& z \\
 \text{Вых 2} &= x \& y \\
 \text{Вых 3} &= (x \& y) \vee (x \& z) \\
 \text{Вых 4} &= x \\
 \text{Вых 5} &= x \vee (y \& z) \\
 \text{Вых 6} &= x \vee y \\
 \text{Вых 7} &= x \vee y \vee z.
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Здесь при некотором значении кода в регистре  $R_3$  возбужденным оказывается выход, соответствующий этому значению и все выходы, соответствующие большим значениям кода. Для получения звукового сигнала достаточно подключить к каждому выходу дешифратора отдельный динамик. При этом все динамики будут работать в двоичном режиме переключения из одного состояния в другое с некоторой и, возможно, различной частотой. Суммирование их действий происходит в воздушной среде, что и обеспечивает выработку звукового сигнала.

Интервальный приемник-передатчик. Примером сигнала, относящегося к асимметричному типу, является речевой сигнал. Определяется это тем, что речь практически выполняется только на выдохе. Также как в случае изображений, это предопределяет возможность технического решения для устройства приема-передачи речи на основе интервальной схемотехники. Частично эта задача уже была решена в устройстве ЧМ демодулятора [40].

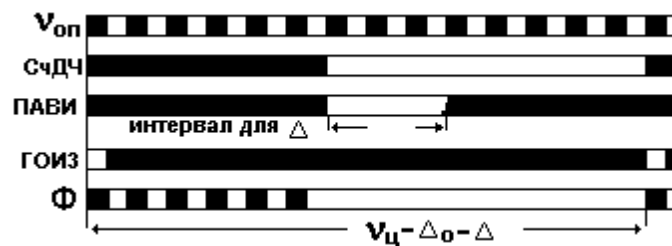
На рис. 55 представлена структурная схема такого устройства. Оно содержит высокочастотный генератор опорной частоты, вырабатывающий частоту  $\nu_{оп}$ , к схем совпадения с формирователями посылок выходных сигналов. Использование к схем совпадения обусловле-

но необходимостью получения достаточной выходной мощности передатчика для передачи по каналу связи.



**рис. 55 Интервальный приемник-передатчик**

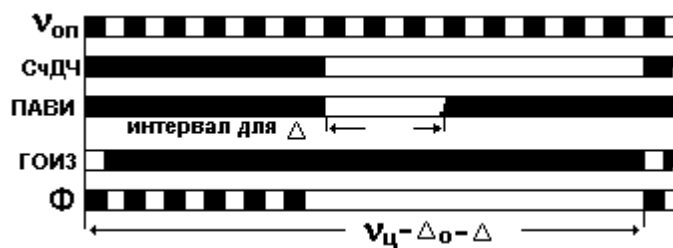
Устройство содержит также счетчик деления опорной частоты СчДЧ, обеспечивающий снижение частоты генератора опорной частоты  $v_{оп}$  до величины  $v_{ц} = v_{оп} / n$ . В свою очередь частота  $v_{ц}$  смещается (уменьшается) на постоянную величину  $\nabla_0$  до величины  $(v_{ц} - \nabla_0)$  путем блокировки одного импульса частоты  $v_{оп}$ . Выполняется это с помощью линии задержки и генератора одиночного импульса ГОИЗ, вырабатывающего периодически сигнал установки нуля СчДЧ.



**рис. 56. Передача**

При поступлении асимметричного (однополярного) речевого сигнала на вход устройства частота ( $\nu_{\text{ц}} - \nabla_0$ ) может быть еще уменьшена до величины ( $\nu_{\text{ц}} - \nabla_0 - \nabla$ ) на переменную величину  $\nabla$ , зависящую только от амплитуды речевого сигнала. Это уменьшение обеспечивается с помощью преобразователя амплитуда - временной интервал ПАВИ, путем блокировки подачи импульсов опорной частоты в СчДЧ. Работа ПАВИ для уменьшения ошибки преобразования синхронизируется выходным сигналом СчДЧ, рис. 56.

Устройство содержит также входной усилитель с ограничителем для принимаемого по каналу связи сигнала. После усиления и ограничения посылка принимаемого сигнала преобразуется в пачку импульсов, следующих с частотой  $\nu_{\text{оп}}$ . Формирователь огибающей пачки импульсов выделяет огибающую, имеющую частоту ( $\nu_{\text{ц}} - \nabla_0 - \nabla$ ). Генератор одиночного импульса ГОИ1 синхронизированный импульсами генератора опорной частоты обеспечивает дифференцирование этой огибающей путем выработки при поступлении переднего фронта огибающей узкого одиночного импульса стандартной формы, рис. 57.



**рис. 57. Прием**

В состав устройства входят также еще две схемы совпадения Сп1 и Сп2. На выходе Сп1 образуется пачка импульсов с числом импульсов пропорциональным величине разностной частоты ( $\nabla_0 + \nabla$ ) между

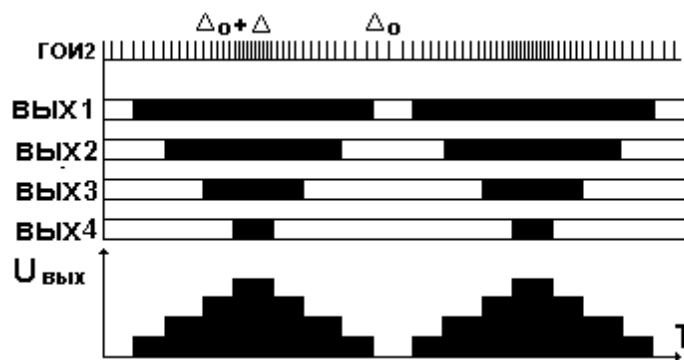
частотами  $\nu_{\text{ц}}$  и  $(\nu_{\text{ц}} - \nabla_0 - \nabla)$ , а на выходе второй схемы совпадения Сп2 вырабатывается такая же пачка импульсов, но со сдвигом на половину периода разностной частоты.

Как и раньше эти пачки импульсов используются для переключения триггера пачки ТП, для подсчета числа импульсов в пачке импульсов в счетчике импульсов СЧИ, для разрешения приема кода в регистр Рг, рис. 58.



**рис. 58. Прием (формирование разностной частоты)**

Генератор одиночного импульса ГОИ2 на выходе триггера пачки ТП вырабатывает начальный импульс, используемый для установки в ноль счетчика импульсов СЧИ перед началом подсчета числа импульсов в пачке. Однако здесь необходимо выбирать величину разностной частоты так, чтобы в счетчике импульсов СЧИ были записаны все единицы.



**рис. 59. Прием (формирование выходного гармонического сигнала)**

Интервальный приемник-передатчик является устройством, обеспечивающим полудуплексный режим работы. При работе в режи-



ме передачи сформированная частота импульсов ( $\nu_{\text{ц}} - \nabla_0 - \nabla$ ) модулируется высокой частотой  $\nu_{\text{оп}}$  и передается по каналу связи. Если же приемник-передатчик работает в режиме приема, то ГОИЗ заблокирован, и на выходе СЧДЧ вырабатывается частота  $\nu_{\text{ц}}$ . Когда на вход интервального приемника-передатчика поступает по каналу связи сигнал от другого аналогичного устройства, то обеспечивается его демодуляция, рис. 59.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере сигналов и частично изображений в работе изложены основы общей теории представления. Она включает две части: пространственноподобную и времениподобную. Пространственноподобная или классическая теория хорошо известна, поэтому в работе изложены только основные ее моменты, призванные обозначить ее главные черты и особенности.

Что же касается времениподобной теории, то все подходы здесь являются новыми и составляют основное содержание книги. И если математические средства моделирования, отвечающие пространственноподобному способу представления, ориентированы на поиск объекта путем его измерения, то математические средства моделирования в рамках времениподобного способа представления обеспечивают поиск объекта путем его узнавания.

Пространственноподобный и времениподобный способы представления образуют дуальную пару, две взаимно дополняющие друг друга части. Эти способы несовместимы, но и неразделимы.

Система представления в том виде, в котором она сформулирована в книге, находит подтверждение в системах живописи и музыки, полностью совпадает с системой, описанной в «Книге Перемен», она также частично укладывается в рамки современного знания в физике. Развитая система представления подчеркивает, что самое общее содержание пространственно-временного феномена можно охарактеризовать с помощью двух наиболее простых по смыслу свойств: свойства симметрии и свойства асимметрии, и что в этом смысле пространственно-временной феномен выступает как единый носитель этих двух простейших свойств. Это соответствует принципу дополнительности в физике, но противоречит способу применения квантовой теории. В этом смысле книга решает проблему однозначно в пользу принципа дополнительности, предлагая информационную модель вакуума и ду-

альную форму закона всемирного тяготения.

Любой физический объект (в том числе сигналы и системы) обладает одновременно и свойством симметрии и свойством асимметрии. Однако в зависимости от типа объекта одно из этих свойств является для него определяющим и влечет за собой выбор более эффективного способа представления. Для симметричных объектов это пространственноподобный способ представления, для асимметричных объектов это времениподобный способ представления.

## Словарь основных терминов

**Представление, знание** – образ явлений и предметов объективной реальности.

**Физическая модель** - словесная абстракция, представление физических объектов и физических процессов.

**Непрерывное множество** – первичный математический объект, абстрагирующий физическую сущность, которая воспринимается нами как непрерывное явление, разделяющееся на части.

**Элементы** – первичные математические объекты, абстрагирующие физические сущности, которые воспринимаются нами как дискретные явления, в совокупности образующие дискретное множество.

**Отношение** – гипотетическое правило, связывающее два символических непрерывных или дискретных объекта. Связь объектов, которая существует или не существует.

**Операция** – отношение, связывающее три символических объекта.

**Структура** – математическая модель, определяющая непрерывный или дискретный математический объект, а также отношения и операции между его частями или элементами.

**Отношение, операция, соответствие, функция, отображение, преобразование, оператор** – синонимы.

**Группа** – математическая структура, наделенная свойством симметрии.

**Полугруппа** – математическая структура более общего вида, чем группа, включающая структуры, наделенные свойством асимметрии.

**Переменная для пространства** – обратимая переменная  $A$  и

первичная в случае пространственноподобной теории, необратимая переменная  $A^+$ , часть пространства в вертикальном направлении в случае времениподобной теории.

**Переменная для времени** - обратимая переменная  $T$  и первичная в случае пространственноподобной теории, необратимая переменная  $T^+$ , часть пространства в горизонтальном направлении в случае времениподобной теории.

**Меандр** – периодическая последовательность импульсов, в которой длительность импульса равна длительности паузы между импульсами.

**Разностная частота** - интервал одного периода разностной частоты двух последовательностей импульсов, определяется по минимальному расстоянию между моментами точного повторения взаимного начального положения импульсов двух последовательностей.

**Сложение** – операция композиции объектов в физическом пространстве. В пространственноподобной модели сложение осуществляется путем суммирования мгновенных значений амплитуды. Во времениподобной модели сложение осуществляется путем укладывания (складывания) симплексов.

## Литература

1. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основе геометрии.-Сб. статей: Альберт Эйнштейн и теория гравитации, М.:Мир, 1979, стр 18.
2. Кац М., Улам С. Математика и логика. - М.: Мир, 1971, стр.162.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Сов. радио, 1977.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.-М.:Наука, 1984.
5. Финкельштейн М.И. Основы анализа гребенчатых фильтров с запаздывающей обратной связью, Рига: Труды рижского ин-та инж. гражданского воздушного флота, вып.25, 1963, стр.25.
6. Прохоров А.М. Физика.-БСЭ, 3-е изд., т. 27, М.: Советская Энциклопедия, 1987, стр. 337-348.
7. Штейман Н.Я. Пространство и время. -БСЭ, 3-е изд., т. 21, М.: Советская Энциклопедия, 1987, стр. 315.
8. Герштейн С.С. Симметрия в физике.-БСЭ, 3-е изд., т.23, М.: Советская Энциклопедия, 1987, стр. 248.
9. Хокинг С. От большого взрыва до черных дыр. Краткая история времени.-М.: Мир, 1990, стр.22.
10. Козырев Н.А. Избранные труды.-М.: Наука, 1991.
11. Лейзер Д. Создавая картину вселенной.- М.:Мир, 1988.
12. Ляпин С.Е. Полугруппы. - М.: Госиздат, 1960.
13. Яглом И.М. Булева структура и ее модели.-М: Сов.радио,1980.
14. Карцев М.А.Арифметика цифровых машин,-М: Наука, 1969.
15. Бермант А.Ф.,Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.-М.:Наука,1969.
16. Биркгофф Г. Теория решеток.-М: Мир, 1984.
17. Гретцер Г. Общая теория решеток.-М: Мир, 1982.
18. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М: Физмат,1961.
19. Фукс Л. Частично-упорядоченные алгебраические системы.-М:

Мир, 1965.

20. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний.-М-Л: Гос.изд.теоретич. лит., 1952.
21. Казимир Малевич.-собр.соч.,т1,1995.
22. Сарабьянов Д.В. История русского искусства конца XIX начала XX века.-М:МГУ,1993.
23. Прокофьев В. Подвиг великого упряма, в кн. Перюшо А. Сезанн.-М:ЖЗЛ,1966.
24. Модернизм, под. ред. Ванслова В.В.-М:Искусство,1973.
25. Gleizes La peinture et ses lois. Ce guidevait sortir du cubisme.- Paris,1924.
26. Бердяев Н.А. Кризис искусства.-М:1918.
27. Read H. Art now. An introduction to the theory of modern painting and sculpture.-London,1933.
28. Golding J.Erinnerungen an Cezanne.-Berlin,1930.
29. П. Сезанн, альбом, сост. Барская А.-Л:1975.
30. Неизвестный русский авангард в музеях и частных собраниях, сост. Сарабьянов А.Д.-М:1992.
31. Fenimor E.E. Coded Aperture Imaging Predicted Performance of Uniform Redundant Arrays.- Appl. Opt., v17, и22, 1978.
32. Готт В.С. Философские вопросы современной физики.-М:1988.
33. Мигдал А.Б. Физика и философия. -ж. Вопросы философии,№1,1990.
34. Мигдал А.Б. Поиски истины.-М:1983.
35. Щуцкий Ю.К. Китайская классическая «Книга Перемен».- М:1997.
36. Вильгельм Р., Вильгельм Г. Понимание «И цзин».-М:1998.
37. Ханджян О.А. Цифровой фильтр, патент РФ №1109888.
38. Скиннер Д.К. Рентгеновские изображения с кодирующими масками.-М: В мире науки, №10, 1988.
39. Ханджян О.А. Двоичный ЧМ демодулятор, патент РФ

№663072.

40. Ханджян О.А. Приемо-передатчик для полудуплексной системы связи, патент РФ №2003230.